۵۱۲
۱۰۷
ج ۹۴۵۹ و

سازمان کتابخانه ها، موزه ها و مرکز اسناد آستان قدس رضوی

اداره مخطوطات

نام کتاب: کتاب جبر سال سوم دبیرستانها

مؤلف: محمد وحید طباطبائی - تقی فاطمی - محسن هنربخش

موضوع: جبر — زبان: فارسی

سال چاپ: ۱۳۲۲ ش — محل چاپ: تهران

شماره عمومی: ۱۶۵۴۱ — کتابخانه / بخش

~~وقفی~~/ خریداری: از غلامحسین روشن نژاد — تاریخ: مهر ۸۲

طول: ۲۰٫۴ — عرض: ۱۳٫۷ — شماره صفحه ها: ۲۴۳ صفحه

مصور ☐ درسی ☒ گراوری ☒ افست ☐

ملاحظات

سیعه

توانا بود هر که دانا بود

وزارت فرهنگ

کتاب جبر

سال سوم دبیرستانها

حق چاپ محفوظ

۱۳۲۲

شرکت چاپخانهٔ تابان

فصل اوّل

الف - مُراجعه بدَرس های پیش

۱- پیش از شروع ببرنامهٔ امسال باید بوسیلهٔ حَلّ مسئله های پایین بدَرسهای سال پیش مُراجعه شود. درجاهائیکه لازم باشد بَعضی از دستُورهای مُهمّ راکه درکتاب اوّل گُفته شده است یادآوری میکنیم :

تمرین

۱- معلوم کنید که این تساوی وقتیکه $x = 3$ میباشد صحیح است یا نیست

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

۲- چه تفاوتی بین دو عدد ۳ درین عبارتست $m^3 - 3n$ و هرکدام راچه مینامند؟

۳- ضریب $a + b$ درعبارت پایین چیست ؟

$$3x(a+b) - 5(a+b)c + ad + bd$$

۴- ضریب a رادرین عبارت بدست آورید

$3ab - 4a + 7ax$

۵- عبارت های زیر را برحسب حرف x مُرتّب کنید

$ax^2 - 2bx + x^2 - cx + 2y^2 - 4a^2$

$x^3 - 2x^2 + ax^2 - x^3y + y^2 - 1$

۶- مجموع عبارتهای زیر را بدست آورید و صحّت نتیجه را وقتیکه $x = 1$ و $y = -2$ و $z = -1$ است تحقیق کنید:

$8x^2 - 3y + 2z$

$4x^2 + 5y - 6z + 2$

$-4x^2 + 3y + 5z - 5$

۷- ماندهٔ تفریق های زیر را بدست آورید:

$-4a^4 + 4b^3$ از $7a^4 - 3b^3$

$4x + y - 7z$ از $1 + 3x - 4y + 5z$

۸- عبارت $3ax^2 - 5x + a - 1$

را از $-2ax^2 + 7x - 2a + 2$

تفریق کنید و بفرض $x = -3$ و $a = 2$ درستی نتیجه را تحقیق کنید.

۹- حاصل جمع عبارتهای $6(x+y)^2$ و $5(x+y)^2$ و

$-2(x+y)^2$ را حساب کنید و از روی آن حاصل جمع $-2(x+y)^2$ و $9(x+y)^2$ را بدست آورید.

قاعده ضرب - اوّلاً- حاصل ضرب دو یا چند یکجمله خود یکجمله ایست که ضریب عددیش حاصل ضرب ضریبهای عددی آن یک جمله ها (با قید نشانه) بوده و تمام حرفهای آن یک جمله ها را دارا باشد نمای هریک از این حرفها مُساوی مجموع نماهائیست که آن حرف در یکجمله ها دارد.

ثانیاً- برای ضرب یکجمله در چند جملهٔ یک جملهٔ مفروض را در هریک از جمله های چند جملهٔ ضرب کرده حاصل ضربهای جزء را با هم جمع جبری میکنیم.

ثالثاً- برای ضرب دو چند جمله باید هریک از جمله های یکی از آنها را در کلیّهٔ جمله های چند جملهٔ دیگر ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را جمع جبری نمود.

تمرین

۱۰- حاصل ضرب سازه های زیر را بدست آورید:

$x^a\cdot(-x)$ $\qquad x^n\cdot x^m$ $\qquad a^5\cdot(-a^4)\cdot a^7$

$a^{n+1}\cdot a^{n-1}$ $\qquad x^a\cdot x^{a+3}$

$x^2y\times 2x^3y^2\times 3xy^4$ $\qquad 4^3\times 4^4\times(-4)^3$

$2^7 \times (-2^{-2}) \times (-2)^{-2}$ ، $3^2 \times 3^{-2} \times 3^4$

$x^{a+b} \cdot x^{2a-b} \cdot x^{-a}$

$2(a+b)\frac{7}{2}(a+b)$

$x(y-a+b)2x^2(y-a+b)^2$

$(3a-5)(2a+6)$

$(3x^4-3x+5)(x^2-5x+6)$

$(x^2-ax+a^2)(x^2-a^2+ax)$

$(a^3-a^2+a)(a^2x+x+ax)$

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy)$

۱۱- اگر در تساوی $ax(a+3)+a(10-a^2)=x+2$ بجای x عدد $a-3$ را قرار دهیم تساوی برقرار هست یا نیست؟

قاعدهٔ تقسیم- اوّلاً در تقسیم یکجمله بر یک جمله برای تعیین ساده‌ترین عبارت بهر $\frac{A}{B}$ کافیست که بخشی A و بخش‌یاب B را بر سازه‌های مشترکشان تقسیم کنیم ثانیاً در تقسیم چند جمله بر یکجمله هر یک از جمله‌های بخشی را بر بخش‌یاب تقسیم نموده بهرهای جزء را جمع جبری مینمائیم ثالثاً- در تقسیم دو چند جمله پس از ساده کردن آنها هر یک را نسبت بتوانهای

نزولی یا صعودی یکی از حروف‌ها مرتّب نموده بر راه زیر عمل مینمائیم:
جملهٔ اوّل بخشی را بر جملهٔ اوّل بخش‌یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله‌های بخشیاب ضرب مینمائیم و حاصل را از جمله‌های بخشی کم میکنیم تا نخستین مانده بدست آید از نو جملهٔ اوّل مانده را بر جملهٔ اوّل بخش‌یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله‌های بخش‌یاب ضرب مینمائیم و حاصل را از جمله‌های این مانده کم می‌کنیم تا دوّمین مانده بدست آید و بهمین راه عمل را ادامه میدهیم تا بماندهٔ صفر و یا بمانده‌ای برسیم که درجه اش از درجهٔ بخش‌یاب کمتر باشد.

تمرین

۱۲- مطلوبست تعیین ساده‌ترین صورت بهرهای زیر:

$\frac{-x^5y^6}{x^2y}$ ، $\frac{x^2y-y^2}{-y}$ ، $\frac{2x^4y^2}{xy}$

$\frac{2x^2-5x+3}{2x-3}$ ، $\frac{-a^{n+6}+a^{3n}}{a^n}$

$\frac{6x^6-5x^4+25x^3-17x^5}{5x^2-2x^3}$ ، $\frac{18x^2+69xy-165y^2}{9x-15y}$

$\frac{a^3b^3+8c^3+125-3abc}{ab+2c+5}$ ، $\frac{2a^4-12a^2-2+11a-7a^3}{1-3a-2a^2}$

$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}$

$\frac{x^{4a}+x^4+x^{2a+2}}{x^2+x^{2a}-x^{a+1}}$ ، $\frac{a^{4x+4}-16a^4}{a^{x+1}+2a}$

۱۳- عبارت $a^2-7a+12$ را بر $a-3$ تقسیم کنید و بفرض $a=-2$

درستی عمل را امتحان کنید.

قاعدهٔ برداشتن و گذاشتن پرانتزها - نخست - میتوان پرانتزی را که در جلوی آن نشانهٔ + است حذف نمود در این صورت نشانهٔ جمله ها تغییر نمیکند

دوم - اگر جلوی پرانتز - باشد پس از برداشتن پرانتز باید نشانهٔ جمله های درون پرانتز را تغییر داد

سوم - همواره میتوان یک چند جمله درون پرانتزی که دارای نشانهٔ + است نوشت

چهارم نیز میتوان یک چند جمله را پس از تغییر دادن نشانهٔ جمله های آن در داخل پرانتزی که دارای نشانهٔ - است نوشت.

تمرین

۱۴- در عبارتهای زیر پرانتزها را برداشته آنها را ساده کنید:

$$5+6-(-5+3)+(-6-2)+10-3$$

$$8a+(3y-8a+2)-(2y-3a+2)$$

$$a-4-(b-2a)-[3(b-a+4)-2(6-4b)]$$

$$6a-[-(y-2z)+(3z-4y)-(4y-3a)]$$

$$4a-2(a-3)-3[a-3(4-2a)+8]$$

$$2x^2+7x-(2x+1)(3x+2)$$

$$(a-b-2)-(b+a-2)-[-(2b+4)+a-b]$$

$$(x+2)(x^2-2x+1)-(x-2)(x^2+2x+1)$$

۱۵- عبارتهای زیر را درون پرانتزی ببرید که جلوی آن - باشد:

$-a+3x$ $\qquad 2x^2-(a-x^2)$ $\qquad 2a^2-b+x-(a^2+b-x)$

اتحادهای مهم

(۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(۳) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(۴) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

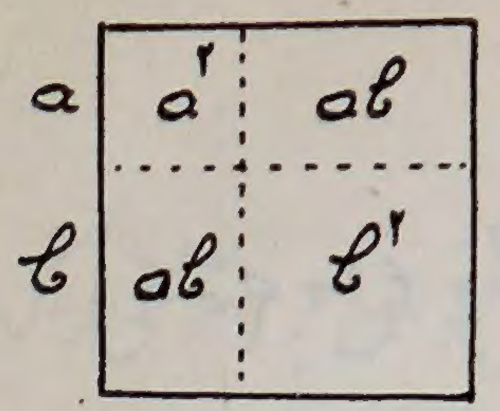
(۵) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(۶) $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

(۷) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(۸) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

اگر a و b را طول دو قطعه خط فرض کنیم طرف اول اتحاد (۱) مساحت مربعی است بضلع $a+b$. از روی شکل دیده میشود که مساحت این مربع



مساویست با مجموع مساحت های دو مربع و دو مستطیل که اضلاع آن دو مربع مساوی a و b و دو مستطیل مساوی بوده و بضلعهای a و b میباشند.

تمرین

۱۶- درستی اتحادهای دوم و سوم و چهارم، را نیز بهمین راه هندسی ثابت کنید

پرسش های شفاهی

حاصل عبارتهای زیر را بگوئید:

$(x-۳)^۲$ $\quad (۲x+۵)^۲$ $\quad (a+۴)^۲$

$(x^۲+۳x)^۲$ $\quad (۷a-۶b)^۲$ $\quad (۲a-۵)^۲$

$(ab-۲cd)^۲$ $\quad (۳a-۴b)^۲$

$(x-a)(x+a)$ $\quad (\frac{۱}{۲}a-\frac{۱}{۴}b)^۲$

$(ab-c)(c+ab)$ $\quad (۲a-۱)(۲a+۱)$

$(x+۳)(x+۴)$ $\quad (۶x+y)(y-۶x)$

$(a+۶)(a-۷)$ $\quad (x-۲)(x-۷)$

$(۳x+۱)(۳x+۴)$ $\quad (xy-۳)(xy+۵)$

$(x-y-۱)^۲$ $\quad (x+y+۱)^۲$

$(۱-a)^۳$ $\quad (a-x)^۳$ $\quad (a+۳)^۳$

$(۲x-۳b)^۳$ $\quad (a+۲b)^۳$

تمرین

۱۷- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید

$[(a+b)+۱][(a+b)-۱]$

$(x-y+۳)(x-y-۳)$

$(a+x+\sqrt{x})(a+x-\sqrt{x})$

$(\sqrt{a-۱}-\sqrt{a+۱})^۲$

$(۲x-y+z)(۲x-z+y)$

$(\frac{a}{۲}-\frac{b}{۳}+\frac{۳}{۴})(-\frac{a}{۲}+\frac{۳}{۴}+\frac{b}{۳})$

ب- تعیین ماندهٔ تقسیم یک چند جمله بر دو جمله درجهٔ اول $x \pm a$

۲- اوّل طریقهٔ تعیین ماندهٔ تقسیم بر $x - a$. فرض می‌کنیم P بخشی (چند جملهٔ برحسب x) و $x-a$ بخشیاب و q قسمت درست بهر و R ماندهٔ تقسیم باشد بنابراین

اتحاد زیر را خواهیم داشت

$$P = (x-a)q + R \qquad (۱)$$

باید دانست که R به x بستگی ندارد زیرا درجهٔ مانده از درجهٔ بخش یاب (که برحسب x از درجهٔ اول است) باید کمتر باشد

برای تعیین مانده R کافی است که در اتحاد بالا x را مساوی a بگیریم در این صورت جملهٔ $(x-a)q$ مساوی صفر شده و R بدست میآید از اینقرار:

وقتیکه x را به a تبدیل کنیم چندجملهٔ P تبدیل به چندجمله ای برحسب a میشود که آنرا به A مینمائیم و چون تساوی (۱) بازاء جمیع مقادیر x برقرار است (زیرا اتحاد است) پس خواهیم داشت $R = A$

یعنی: ماندهٔ تقسیم هر چندجملهٔ بر $x-a$ مساوی حاصل آن چندجملهٔ است بعد از تبدیل نمودن x به a

مثال ۱- میخواهیم ماندهٔ تقسیم عبارت $3x^3 - 5x^2 + 2$ را بر $x-2$ تعیین کنیم

کافی است در چندجملهٔ بخشی بجای x عدد ۲ را قرار دهیم تا مانده بدست آید از اینقرار:

$$R = 3\times2^3 - 5\times2^2 + 2 = 24 - 20 + 2 = 6$$

مثال ۲- ماندهٔ تقسیم $2x^3 - 250$ را بر $x-5$ بدست آورید

از روی قاعدهٔ بالا خواهیم داشت

$$R = 2\times5^3 - 250 = 250 - 250 = 0$$

یعنی $2x^3 - 250$ بر $x-5$ بخش پذیر است از اینجا چنین برمیآید که:

۳- هرگاه حاصل عبارت بخشی پس از تبدیل کردن x به a صفر باشد آن بخشی بر $x-a$ بخش پذیر است

پرسش های شفاهی

ماندهٔ تقسیمهای زیر را پیدا کنید:

$(x^3-8):(x-2)$ $\qquad$ $(2x^2-1):(x-1)$

$(2a^3-b^3):(a-b)$ $\qquad$ $(x^3+a^3):(x-a)$

$(x^5+y^5):(x-y)$ $\qquad$ $(2x^2-3y^2):(x-y)$

۴- دوم راه تعیین ماندهٔ تقسیم بر $x+a$. چون عیناً مطابق شمارهٔ بالا عمل کنیم نتیجه میشود:

ماندهٔ تقسیم یک چندجملهٔ بر $x+a$ مساوی حاصل آن چندجملهٔ است بعد از تبدیل نمودن x به $-a$.

ونیز ممکن است همین نتیجه را از روی شمارهٔ بالا بدست آورد از اینقرار:

میتوانیم $x+a$ را بنویسیم $x-(-a)$ بنابراین برای تعیین ماندهٔ تقسیم کافی است بجای x ، $-a$ را قرار دهیم

۵- نتیجه- شرط اینکه یک چند جمله بر $x+a$ بخش پذیر باشد این است که حاصل آن چند جمله پس از تبدیل x به $-a$ صفر شود- چنانکه چند جملهٔ x^2y+axy بر $x+a$ بخش پذیر است زیرا

$$R=(-a)^2y+a(-a)y=a^2y-a^2y=0$$

پرسش های شفاهی

ماندهٔ تقسیمهای زیر را حساب کنید:

$(2x^3-a^3):(x+a)$ $(x^3-1):(x+1)$

$(x^4+y^4):(x+y)$ $(2x^2+5):(x+2)$

$(a^3+b^3):(a+b)$ $(x^2-y^2):(x+y)$

از آنچه گفتیم نتیجه های زیر بدست میآید:

۶- اوّل- دو جملهٔ x^n-a^n همواره بر $x-a$ بخش پذیر است

زیرا $R=(a)^n-a^n=0$

چنانکه x^2-a^2 بر $x-a$ بخش پذیر است و بهر $x+a$ است

همچنین a^3-b^3 بر $a-b$ بخش پذیر است و بهر a^2+ab+b^2 است

وبطور کلّی در تقسیم x^n-a^n بر $x-a$ بهر چنین است:

$$x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots\dots+a^{n-1}$$

و یا $\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+a^{n-2}x+a^{n-1}$

پرسش های شفاهی

در هر یک از تقسیمهای زیر بهر را بدست آورید:

$(x^3-8):(x-2)$ $(x^3-a^3):(x-a)$

$(x^5-b^5):(x-b)$ $(x^4-y^4):(x-y)$

۷- دوّم- دو جملهٔ x^n-a^n وقتی بر $x+a$ بخش پذیر است که n جفت باشد

زیرا با این شرط $R=(-a)^n-a^n=0$

و در حالتیکه n تاق باشد بخش پذیر نیست

زیرا $R=(-a)^n-a^n=-2a^n$

و چون تقسیم کنیم در هر دو حالت بهر چند جملهٔ کاملی است شامل n جمله که نشانهٔ جمله‌ها یک در میان + و - است:

$$x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-a^3x^{n-4}+\dots\dots$$

پرسش های شفاهی

در هر یک از تقسیمهای زیر بهر را بدست آورید و معلوم کنید که در کدام تقسیم مانده صفر است

$(x^3-8):(x+2)$ $\qquad$ $(x^2-a^2):(x+a)$

$(x^4-y^4):(x+y)$ $\qquad$ $(x^3-a^3):(x+a)$

۸- سوم- دو جملهٔ x^n+a^n بر $x+a$ **بخش پذیر است اگر n تاق باشد**

زیرا با این شرط $R=(-a)^n+a^n=0$

و اگر n جفت باشد بخش پذیر نیست

زیرا $R=(-a)^n+a^n=2a^n$

در هر دو حالت بهر چند جملهٔ کاملی است شامل n جمله که نشانهٔ جمله های آن یک درمیان + و - است

پرسش های شفاهی

در هر یک از تقسیم های زیر بهر را بدست آورده و معلوم کنید در کدام تقسیم مانده صفر است

$(a^4+b^4):(a+b)$ $\qquad$ $(x^2+a^2):(x+a)$

$(x^5+y^5):(x+y)$ $\qquad$ $(x^3+8):(x+2)$

۹- چهارم- دو جملهٔ x^n+a^n هیچوقت بر $x-a$ **بخش پذیر نیست**

زیرا $R=a^n+a^n=2a^n$

و بهر چند جملهٔ کاملی است دارای n جمله از اینقرار:

$$x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots\cdots+a^{n-1}$$

تمرین

۱- در هر یک از تقسیم های زیر بهر و مانده را بدست آورید:

$27x^3-1$	بر	$3x-1$
$a^{15}+b^{15}$	بر	a^3+b^3
$64x^6-\frac{a^6}{729}$	بر	$4x^2-\frac{a^2}{9}$
$x^4y^4-16a^4$	بر	$xy-2a$
$a^{16}-b^{12}$	بر	a^4-b^3
$(x+y)^3-a^3$	بر	$x+y-a$
$x^{12}-y^4$	بر	x^3+y
$x^{3m}+y^{3n}$	بر	x^m+y^n
$x^{2n}-a^{2n}$	«	x^n+a^n
$(x+y)^7+a^7$	«	$(x+y+a)$

۲- ثابت کنید که اگر چند جملهٔ P بر دو جمله های $x-a$ و $x-b$ و $x-c$ (بنابر آنکه $a\neq b\neq c$ باشد) بخش پذیر باشد بر حاصل ضربشان نیز بخش

پذیراست

۷- تجزیهٔ چند جملهٔ بسازه های اوّل

(با مُراجعه بکتاب اوّل)

۱۰- مقصود از سازهٔ اوّل عبارتیست دُرست که جز بر خود و یک (بدون قید نشانه) بر سازهٔ درست دیگری بخش پذیر نباشد چنانکه $a-b$ بنابا این تعریف اوّل است اگرچه بر $\frac{1}{a-b}$ بخش پذیر باشد بهمین نحو در حساب عدد اوّل عدد درستی را گویند که جز بر خود و یک بر عدد درست دیگری بخش پذیر نباشد مانند ۳ که عدد یست اوّل اگرچه بر $\frac{1}{3}$ قابل قسمت باشد.

تجزیهٔ یک چند جملهٔ عبارت از تبدیل نمودن آن چند جملهٔ است بحاصل ضرب چند سازهٔ اوّل.

نخست - تجزیهٔ چند جملهٔ که جمله های آن دارای سازهٔ مشترکی باشند و یا بصُورت $ax + ay + bx + by$ باشند.

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه های اَوّل تجزیه کنید.

$2(a+b) - x(a+b) + y(a+b)$

$3z(5x-4a) - 9at(5x-4a)$

$12a^2(3x-2y) + 18ab(2y-3x)$

$ad + 2dx + 3az + 6zx$

$akz + ahz - ahx - akx$

$8hz + 16hx - 6kz - 12kx$

$4a^2 - 4ax - ac + cx$

$mz - 2z + ms - 2s + mt - 2t$

$(x-3y)^3 + 4(x-3y)^2$

$3y^{3x} - y^{2x} + 3y^x - 1$

$a^{3m} + a^{2m} + a^m + 1$

دُوّم - تجزیهٔ چند جملهٔ هائیکه بصُورت $a^2 \pm 2ab + b^2$ و یا $a^2 - b^2$ باشند

تمرین

۲- چند جملهٔ های زیر را بحاصل ضرب سازه های اوّل تجزیه کنید:

$(a-2)^2 - c^2$ و $a^4x^4 - y^4$

$4R^2S^2 - (R-S)^4$ و $16(x-y)^2 - z^2$

$x^2(2h-k)^2 - (m-2R)^4$

$(x-y)^2 - b^2x^2(3c-d)^2$

$R^2 + 2RS + S^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$

$x^2 - y^2 + 2yz - z^2$

$a^4 - b^4 - c^4 - 2b^2c^2$

$x^2 + 6x + 9 - y^2 + 2yz - z^2$

$4a^2 + 9b^2 - 16x^2 - 25y^4 - 12ab + 40xy^2$

$R^2S^2 + 2RS + 1 - c^2 + 10cd - 25d^2$

$121x^8 - 1 - 18y - 81y^2$

$x^2 - y^2 + ax + ay$ $\qquad$ $m + n - m^2 + n^2$

$a^2b^2 - 4b^2 - a^2m^2 + 4m^2$

$x^{2n} - y^{6m}$ $\qquad$ $1,44x^4 - 1,21x^6$

سوّم - چند جملهٔ هایکه بصورت $x^2 + px + q$ باشند (مُراجعه شود به شمارهٔ ۱۲۲ کتاب اوّل یا به مسئلهٔ (۲) شمارهٔ ۱۱ همین کتاب)

تمرین

۳- چند جملهٔ های زیر را بسازه های اوّل تجزیه کنید:

$x^2 + 7x + 12$ $\qquad$ $a^2 + 6a - 16$

$a^2 - 3a - 10$ $\qquad$ $r^2 - 9r + 14$

$z^2 - z - 90$ $\qquad$ $K^2 - 21K + 20$

$1 - 5y + 6y^2$ $\qquad$ $9 - 10x + x^2$

$m^2 - 6mR + 8R^2$ $\qquad$ $1 + 3ab - 10a^2b^2$

$(a+b)^2 - 2(a+b) - 8$

$(x-y)^2 + 4(x-y) + 3$

۴- مطلوبست تجزیهٔ این عبارت $x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$. بترتیب خواهیم داشت

$$x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 = (x^2 - 4y^2)^2$$

$$= [(x-2y)(x+2y)]^2$$

$$= (x-2y)^2(x+2y)^2$$

$x^4 - 18x^2y^2 + 81y^4$ $\qquad$ $x^8 - 17x^4 + 16$

$a^{4x} - 5a^{2x} - 6$ $\qquad$ $S^{4a} - 10S^{2a} + 9$

تجزیهٔ سه جملهٔ $a^4 + a^2b^2 + b^4$ بطور نمونه.

چون یک a^2b^2 برعبارت بالا بیفزائیم مربّع کامل میشود. برای اینکه تغییر نکند ازین مُربّع یک a^2b^2 کم میکنیم ازینقرار:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$

تمرین

۵- عبارت های زیر را بحاصل ضرب سازه های اول تجزیه کنید :

m^8+m^4+1	$x^4+x^2y^4+y^8$
$25x^4-11x^2+1$	$x^4-12x^2y^2+16y^4$
$25x^4-19x^2+9$	$16a^4-17a^2b^4+b^8$
$4a^4+1$	$36a^4-25a^2b^2+4b^4$
$4a^{4n}+b^{4n}$	$64a^4x^2+x^2$

چهارم - تجزیهٔ عبارت هائیکه بصورت $a^n \pm b^n$ میباشند.

چنانکه در شماره (۶) دیدیم a^n-b^n همیشه بر $a-b$ بخش پذیر است:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$$

و این عبارت یعنی a^n-b^n بر $a+b$ هم بخش پذیر است اگر n جفت باشد

چنانکه a^6-b^6 بر $a-b$ و $a+b$ هردو بخش پذیر است:

$$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$$

و

$$a^6-b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$$

و x^3-y^3 بر $x-y$ بخش پذیر است ولی بر $x+y$ بخش پذیر نیست:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

عبارت a^n+b^n وقتی بر $a+b$ بخش پذیر است که n تاق باشد و هیچوقت بر $a-b$ بخش پذیر نیست

چنانکه a^3+b^3 بر $a+b$ بخش پذیر است :

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

تبصره - برای تجزیه کردن a^n-b^n بسازه های اول (وقتیکه n جفت باشد) بهتر اینست که اول تا جائیکه ممکن است موافق قاعدهٔ تجزیه a^2-b^2 آن عبارت را تجزیه کرده پس از آن اگر لازم باشد موافق قاعده بالا عمل را تمام کنیم

مثال ۱- میخواهیم a^6-b^6 را بسازه های اول تجزیه کنیم

$$a^6-b^6=(a^3-b^3)\times(a^3+b^3)$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

و این سازه ها اولند.

مثال ۲- میخواهیم x^8-y^8 را بسازه های اول تجزیه کنیم

$$x^8-y^8=(x^4-y^4)(x^4+y^4)$$

$$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$$

$=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

و این سازه ها اوّلند.

مثال ۳- عبارتهای $8x^3+27$ و $16a^4-1$ و $a^2y^5+a^5y^2$ را بسازه های اوّل تجزیه کنید.

$$8x^3+27=(2x)^3+(3)^3=(2x+3)(4x^2-6x+9)$$

$$16a^4-1=(4a^2-1)(4a^2+1)=(2a+1)(2a-1)(4a^2+1)$$

$$a^2y^5+a^5y^2=a^2y^2(y^3+a^3)=a^2y^2(y+a)(y^2-ay+a^2)$$

تمرین

۶- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه های اوّل تجزیه کنید:

a^5-32 $27-64a^3$ $1-x^3$

$(x+y)^3+z^3$ $(x+y)^3-z^3$

$x^{12}-y^{12}$ $a^{10}-b^{10}$ x^7-128

$a^4+a^3-a^2-a$ $a^{16}-b^{12}$

$b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)$

$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^2$

۱۱- حلّ بعضی همچندی ها از راه تجزیه.

مسئلهٔ ۱- همچندی $x^3-3x^2=10x$ را حلّ کنید

$10x$ را بطرف اوّل برده و سه جملهٔ طرف اوّل را بحاصل ضرب سازه های اوّل تجزیه میکنیم از اینقرار:

$$x^3-3x^2-10x=0$$

$$x(x+2)(x-5)=0$$

پس ریشه های همچندی بالا عبارتند از ریشه های همچندی های $x=0$ و $x+2=0$ و $x-5=0$ و بنابراین همچندی بالا دارای سه ریشهٔ ۰ و ۲- و ۵ میباشد

مسئله ۲- همچندی $y^4-13y^2+36=0$ را حلّ کنید

چون y^2 را به x بنمائیم سه جملهٔ طرف اوّل بصورت $x^2-13x+36$ درمیآید برای تجزیهٔ آن کافیست که ۳۶ را بحاصل ضرب دو عدد که مجموعشان ۱۳- است تجزیه کنیم و آن دو عدد عبارتند از ۹- و ۴- بنابراین همچندی بالا چنین میشود:

$$(y^2-9)(y^2-4)=0$$

ویا

$$(y-3)(y+3)(y-2)(y+2)=0$$

بنابراین ریشه های این همچندی عبارتند از ریشه های همچندی های $y-3=0$

و $y+3=0$ و $y-2=0$ و $y+2=0$ یعنی:

$y=3$ و $y=-3$ و $y=2$ و $y=-2$

تمرین

همچندی های زیر را از روی تجزیه حل کنید:

$x^2-4a^2=0$ $\qquad$ $x^2-5x=0$

$x^2-16x+60=0$ $\qquad$ $a^2=64a$

$x^3-ax^2-12a^2x=0$

$x^2+8x=-16$ $\qquad$ $y^3-y+2=2y^2$

$az+3z=a^2-9$

$x^3+x^2-a^2x-ax=0$

$y^3-7y-6=0$

(چون بجای y عدد ۱- را بگذاریم سه جملهٔ طرف اوّل صفر میشود)

$x^3-6x^2-16x=-96$

$x^3-x^2-x+1=0$ $\qquad$ $R^4-26R^2=-25$

$R^3+3R^2+3R+1=0$

$R^2-7R-8=R+1$

د- ریشه و ریشگی ها

۱۲- میدانیم ریشهٔ mاُم عدد حسابی A عددیست مانند a که چون آنرا بتوان m رسانیم A بدست آید و آنرا چنین نویسند $\sqrt[m]{A}=a$

m را شمارهٔ ریشه و نشانهٔ $\sqrt{\ }$ را ریشگی (رادیکال) نامند

مثال- ریشهٔ دوّم ۴ و ریشهٔ سوّم ۶۴ بترتیب چنین نوشته میشود:

$\sqrt{4}=2$ و $\sqrt[3]{64}=4$

همچنین $\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ و $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$

۱۳- بعضی عددها هستند که نمیتوان ریشه mاُم آنها را بدست آورد یعنی هیچ عددی (درست یا برخه یا دهی) نمیتوان یافت که توان mاُمش عدد مفروض شود چنانکه هیچ عددی نمیتوان یافت که مساوی ریشهٔ دوّم هفت باشد یعنی چون آنرا بتوان دوّم رسانیم ۷ شود و همچنین هیچ عددی یافت نمیشود که مساوی ریشهٔ سوّم ۱۱ گردد یعنی توان سوّمش ۱۱ شود

$\sqrt{7}$ و $\sqrt[3]{11}$ و مانند آنها را گُنگ (اصمّ) گویند

ولی همواره ممکن است با تقریب دلخواهی عددی یافت که توان mاُم آن نزدیک بعدد A باشد

مثلاً $\quad 2<\sqrt{7}<3$

یا $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$

یا $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$

طرفهای بزرگتر را ریشهٔ دوّم هفت با **تقریب اضافی** و طرف‌های کوچکتر را ریشهٔ دوّم هفت با **تقریب نقصانی** گویند

مثلاً ۲,۷ ریشهٔ دوّم هفت است با یک دهم تقریب اضافی

$(2{,}7)^2 = 7{,}29$

و ۲,۶۴ ریشهٔ دوّم هفت است با یکصدم تقریب نقصانی

$(2{,}64)^2 = 6{,}9696$

هر عدد که گُنگ نباشد گُویا (منطق) نامیده میشود مانند ۲۵ و $\sqrt{\frac{9}{16}}$

و $3 - \sqrt{6{,}25}$

۱۴- تبصره - اوّلاً باید دانست که اگر نمیتوان عددی یافت که مُساوی عدد گنگی مانند $\sqrt{2}$ باشد همواره میتوان (پس از انتخاب یکهٔ درازا) آن را با تکهٔ خطّی نمایش داد مثلاً برای نمایش $\sqrt{2}$ میتوان سه گوشه‌ای قائم الزّاویه ساخت که دو پهلوی آن مُساوی یکهٔ درازا باشد درینصورت نتیجهٔ سنجش وتر آن سه گوشه با یکی از دو پهلو عدد گنگ $\sqrt{2}$ است یعنی با این یکه ممکن نیست وتر مُثلّث را بوسیلهٔ عددی برخهٔ یا دهی نمایش داد .

وهمچنین هرگاه شعاع دایرهٔ را یکهٔ درازا اختیار کنیم نسبت درازای مُحیط بقطر عدد گنگی میشود که آنرا π نامند .

ثانیاً چنانکه دیدیم مقدار تقریبی عدد گُنگی را میتوان بعدد دهی نمایش داد و هرچه بخواهیم میتوانیم بمقدار حقیقی این عدد گُنگ نزدیکتر شویم ولی پیکرهای دهی هیچوقت دوره ندارد زیرا میدانیم هر عدد دهیِ دورهٔ تبدیل بیک برخه میشود و موافق تعریف درینصورت عدد مفروض گنگ نخواهد بود .

مثلاً عدد دهی دورهٔ ...۰٫۲۷۲۷ ره گنگ نیست زیرا مُساوی برخهٔ $\frac{3}{11}$ است

وهمچنین عدد ...۰٫۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷ ره مُساوی برخهٔ $\frac{1}{7}$ است پس گنگ نیست

ولی مثلاً اگر عدد گنگ $\sqrt{7}$ را بطور تقریب حساب کنیم هرچه باشد مقدار تقریب حاصل یکعدد دهی میشود که دوره ندارد

همچنین است عدد π که دوره ندارد و تا بیش از ۷۰۰ پیکر بعد از مُمیّز حساب شده است .

تمرین

۱- معین کنید کدام یک ازین عددها گُنگند و مقدار آنها را با تقریب $\frac{1}{1000}$ اضافی و نقصانی حساب کنید

$\sqrt{0{,}09}$ $\sqrt{0{,}9}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{2}$

$\sqrt{75{,}32}$ $\sqrt{2{,}5}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt{0{,}009}$

۲- هریک از عددهای $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ را به تکّه خطّی نمایش دهید.

۱۵- ریشهٔ اعداد جبری - ریشهٔ m ام عدد جبری A را نیز مانند ریشهٔ m اُم عدد حسابی A نمایش میدهند و چنانکه میدانیم

اوّل - هرگاه A مثبت و m جفت باشد برای ریشهٔ m اُم A دو عدد قرینه میتوان یافت

چنانکه ریشهٔ دوّم ۴ مُساویست با ۲+ یا با ۲- و ریشهٔ چهارُم ۵ مُساویست با $+\sqrt[4]{5}$ یا با $-\sqrt[4]{5}$

دوّم - هرگاه A منفی باشد و m جفت برای ریشهٔ m اُم A هیچ عددی پیدا نمیشود زیرا توان جُفت هر عدد (مثبت یا منفی) مثبت میشود.

تبصره - ریشه های جفت عددهای منفی عددهای موهُوم نامیده میشوند مانند $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-4}$ و $\sqrt[4]{-2}$. بطور کُلّی هر عبارتی که در آن عدد موهومی باشد موهُوم خواهد بود

سوّم - هرگاه m تاق باشد برای ریشهٔ m اُم عدد A همیشه یکعدد

یافت میشود نه بیش. درحالتیکه A مثبت باشد این ریشه مثبت است و درحالتی که A منفی باشد ریشهٔ تاق آن هم منفی خواهد بود

مثلاً ریشهٔ سوّم ۲۷ عدد ۳ است: $3=\sqrt[3]{27}$ و همچنین $-2=\sqrt[5]{-32}$

یادآوری - نشانهٔ جلوی ریشگی (رادیکال) - ریشهٔ دوّم ۴ مُساویست با $\pm\sqrt{4}$ یا ۲± ولی هرگاه بنویسیم $\sqrt{4}$ مقصود تنها مقدار $+\sqrt{4}$ یعنی ۲+ است همچنین $+2 = -\sqrt[5]{-32}$ و همچنین است هرگاه در زیر ریشگی (رادیکال) عبارت جبری نوشته شود مثلاً هرگاه بنویسیم $\sqrt{x^2+1}$ مقصود ریشهٔ دوّم x^2+1 است بانشانهٔ +

پرسش های شفاهی

۱- مقدار عددی هریک از عبارتهای زیر را حساب کنید:

$\sqrt[3]{8}$ $\sqrt{25}$ $-\sqrt{4}$ $\sqrt{9}$

$\sqrt[3]{-8}$ $-\sqrt[4]{16}$ $-\sqrt[4]{625}$ $\sqrt[3]{-27}$

$\sqrt[5]{243}$ $-\sqrt[5]{-32}$ $\sqrt[5]{32}$

$-\sqrt[3]{-125}$ $-\sqrt[4]{64}$ $-\sqrt[7]{-128}$

۲- ریشهٔ دوّم ۱۶ و ۱۶- و ۶٫۲۵ و ریشهٔ سوّم ۲۷ و ۲۷- و ریشهٔ ششم ۶۴ را مُعیّن کنید.

۱۶- تقسیم بندی اعداد جبری - اعداد به دو طبقه تقسیم میشوند: اعداد موهوم و اعداد غیرموهوم یا حقیقی اعداد موهوم مانند $\sqrt{-۲}$ و $۵ + \sqrt{-۱}$

اعداد حقیقی مانند $\frac{۲}{۳}$ و $-\sqrt{۲}$ و $۲٫۵$

اعداد حقیقی نیز بنوبت خود بردو نوعند اعداد گویا و اعداد گنگ

اعداد گویا مانند ۵ و $-\frac{۳}{۴}$ و $۰٫۷۵$ وغیره

اعداد گنگ مانند $\sqrt{۲}$ و π و $\sqrt{۳} - ۵$ وغیره

اعداد گویا نیز بردو نوعند: اعداد گویای درست مانند ۲۵ و -۷ و ۵۲ و اعداد گویای برخه مانند $\frac{۳}{۷}$ و $-۲٫۷۶$

از روی جدول زیر تقسیم بندی اعداد جبری معلوم میشود:

- اعداد جبری
  - حقیقی
    - گویا
      - درست
      - برخه
    - گنگ
  - موهوم

پرسش های شفاهی

۱- عددی بنویسید که گویا و برخه باشد

۲- عدد گنگی بنویسید

۳- عدد موهومی بنویسید

۴- عددهای زیر را طبقه بندی کنید

$\sqrt[۴]{(-۳)^۵}$ $\sqrt[۳]{۶٫۵}$ $\sqrt{۵}$ $\sqrt[۳]{۸}$

$\frac{۳}{۳۵} : \left(\frac{۲}{۷} - \frac{۱}{۵}\right)$ $\sqrt[۵]{-۳۲}$ $-\frac{۳}{۵}$

۵- عبارت $\sqrt{x}$ را بازاء مقدارهای مختلف x طبقه بندی کنید

۱۷- عمل های راجع بریشه ها - قضیه - هرگاه شماره ریشه و نمای مقدار زیر ریشگی را در عددی مانند p ضرب کنیم در ریشه تغییری پیدا نمیشود یعنی

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[mp]{A^p}$$

برای اثبات کافی است دو طرف تساوی بالا را بتوان mp برسانیم (برای اینکه $\sqrt[m]{A}$ را بتوان mp رسانیم میتوانیم اول آنرا بتوان m رسانده پس از آن حاصل یعنی A را بتوان p رسانیم)

مثلاً

$$\sqrt{۴} = \sqrt[۶]{۴^۳} = \sqrt[۶]{۶۴} = ۲$$

و

$$\sqrt{a^۳} = \sqrt[۱۰]{a^{۱۵}}$$

تبصره - در بکار بردن قاعده بالا هرگاه p جفت باشد باید دقت نمود که در نشانه اشتباهی رخ ندهد

مثلاً میدانیم که $\sqrt[3]{-8} = -2$ اگر شمارهٔ ریشه و نمای مقدار زیر رشگی را در عدد ۲ ضرب کنیم بدون دقّت در نشانه بتساوی غلط زیر میرسیم:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$$

این غلط از اینجا ناشی شده است که عدد ۸- را بتوان دوّم رسانده‌ایم و در نتیجه نشانهٔ $\sqrt[3]{-8}$ از میان رفته است - برای رفع این غلط باید نشانهٔ - را در جلوی رادیکال گذاشت بدین شکل:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[6]{64} = -2$$

تمرین

۱- تحقیق کنید آیا تساویهای زیر بازاء همهٔ مقدارهای a صحیح است یا نیست

$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$ و $\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2}$

$\sqrt[4]{-a} = \sqrt[8]{a^2}$ و $\sqrt[3]{a} = \sqrt[8]{a^2}$

۲- این تساویها را تکمیل کنید:

$\sqrt[3]{-8} = ?\sqrt[6]{?}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{8} = \sqrt[12]{?}$

$\sqrt[5]{-32} = ?\sqrt[10]{?}$ $\qquad$ $\sqrt{2} = \sqrt[6]{?} = \sqrt[?]{16}$

۱۸- نتیجهٔ ۱- تحویل چند رشگی بیک شماره- برای تبدیل چند رشگی برشگهائی که دارای یک شماره اند بهتر اینست که کوچکترین مضرب

شماره های ریشه ها را شمارهٔ مشترک قرار دهیم و برای تعیین نمای مقدار زیر رشگی کافیست که شمارهٔ مشترک را بر شمارهٔ ریشهٔ هر رشگی تقسیم نموده بهر را در نمای مقدار زیر آن رشگی ضرب کنیم

مثلاً برای تبدیل $\sqrt{3}$ و $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[4]{5}$ برشگهائیکه دارای یک شماره اند کوچکترین مضرب شماره های ریشه ها را که عدد ۱۲ است شمارهٔ مشترک قرار میدهیم و چون بهر تقسیم عدد ۱۲ بر شمارهٔ ریشهٔ اول ۶ و بر شمارهٔ ریشهٔ دوّم ۴ و بر شمارهٔ ریشهٔ سوّم ۳ است بنابراین رشگیهای بالا بترتیب برابرند با $\sqrt[12]{3^6}$ و $\sqrt[12]{2^4}$ و $\sqrt[12]{5^3}$

تمرین

رشگی های هر سطر را دارای یک شماره نمائید

$\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[4]{x^3}$ و $\sqrt{x}$

$\sqrt[3]{-2}$ و $\sqrt{7}$ و $\sqrt[3]{7}$

$\sqrt[3]{x}$ و $\sqrt{y}$ و $\sqrt[3]{y}$

$\sqrt[4]{m^2}$ و $\sqrt[3]{3m^5}$

$\sqrt{a-x}$ و $\sqrt[3]{x+a}$

۱۹- نتیجهٔ ۲- چون شمارهٔ ریشه و نمای مقدار زیر ریشگی را بر عددی مانند p تقسیم کنیم در ریشه تغییری پیدا نمی شود

مثلاً $\sqrt{5^3} = \sqrt[4]{5^6}$ و $\sqrt[4]{a^5} = \sqrt[12]{a^{15}}$

تبصره - هرگاه نمای مقدار زیر ریشگی جفت باشد و بخواهیم آنرا بر عدد جفت p تقسیم کنیم باید متوجه بود که در اینحال همواره مقدار زیر ریشگی مثبت میشود بنابراین باید مراعات نشانه را نمود مثلاً $\sqrt[10]{a^6}$ بازاء همهٔ مقدارهای a (چه مثبت و چه منفی) همواره مثبت است - حال اگر ۱۰ و ۶ را بخواهیم بر ۲ تقسیم کنیم باید نشانهٔ a را در نظر گرفت چنانکه اگر a مثبت باشد چنین میشود $\sqrt[10]{a^6} = \sqrt[5]{a^3}$

و اگر a منفی باشد باید نوشت $\sqrt[10]{a^6} = -\sqrt[5]{a^3}$

این نتیجه برای ساده کردن ریشگیها بکار میرود

تمرین

ریشگی های زیر را با در نظر گرفتن نشانه ساده کنید:

$\sqrt[4]{x^2y^6}$ $\sqrt[14]{x^7}$ $\sqrt[6]{(-2)^{10}}$

$\sqrt[3]{a^3}$ $\sqrt{x^4}$ $\sqrt[4]{x^2}$

$\sqrt[6]{16}$ $\sqrt[5]{32}$ $\sqrt[9]{27}$

۲۰- ضرب ریشه ها- حاصل ضرب چند ریشگی که دارای شمارهٔ

مشترک m باشند مساوی ریشهٔ m اُم حاصل ضرب مقدارهای زیر ریشگی ها است

یعنی

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}\cdot\sqrt[m]{C} = \sqrt[m]{A.B.C}$$

(برای اثبات کافی است دو طرف تساوی بالا را بتوان m برسانیم) اگر شمارهٔ ریشگیها مساوی نباشد اوّل آنها را تحویل بیک شماره نموده پس از آن مانند بالا عمل مینمائیم

مثلاً

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 4^2}$$
$$= \sqrt[6]{128}$$

تمرین

حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید:

$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$

$\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}$ $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{15}$

$\sqrt{3}\,(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$

مطابق ضرب یکجمله ای در چند جملهٔ عمل میکنیم از اینقرار:

$$\sqrt{3}\,(2\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 2\sqrt{6}-3 = 3(\sqrt{6}-1)$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{\frac{ab}{2}}\right)\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$$

مطابق قاعدهٔ ضرب چند جمله در چند جمله عمل میکنیم از اینقرار:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) =$$
$$= 4 + 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 15 = 3\sqrt{6} - 11$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$(4\sqrt{7} - 3\sqrt{10})(3\sqrt{7} + 2\sqrt{10})$$

$$(2\sqrt{a} - \sqrt{3a})^2$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{x+2})^2 \qquad (\sqrt{a-2} + \sqrt{2+a})^2$$

$$\sqrt{2}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) \qquad \sqrt[3]{3}(\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x^3})$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2})$$

۲۱- نتیجهٔ ۱- همواره میتوانیم سازه ای را درون ریشگی نمائیم بشرط اینکه آن سازه را بتوان نمای ریشه رسانیده در عبارت زیر ریشگی ضرب نمائیم.

مثلاً

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt[5]{2^5} = \sqrt[5]{32}$$

و

$$a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$$

تمرین

۱- سازهٔ خارج ریشگی را درون ریشگی کنید

$$5\sqrt{\frac{1}{5}} \qquad 2\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad 4\sqrt{3}$$

$$x\sqrt{x} \qquad x\sqrt{\frac{1}{x^2}} \qquad c^x\sqrt{c^x - c^{-x}}$$

$$(3x+1)\sqrt{\frac{5}{9x^2-1}} \qquad (a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a^2-b^2}}$$

۲- این عبارت را ساده کنید

$$(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{9x^2-9y^2} + (x+y)\sqrt{\frac{25xy^2-25y^3}{x+y}}$$

۲۲- نتیجهٔ ۲- بعکس میتوان سازه ای را از زیر ریشگی بیرون آورد وقتیکه نمای آن سازه بر شمارهٔ ریشه بخش پذیر باشد درینصورت میتوان آن سازه را با نمائیکه مساوی بهر تقسیم نمای اول آن بر شمارهٔ ریشه است در بیرون ریشگی بصورت ضرب نوشت

مثلاً

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{a^8 b^{12} c^5} = \sqrt[4]{a^8 \cdot b^{12} \cdot c^4 \cdot c} = a^2 b^3 c\sqrt[4]{c}$$

این عمل هم برای ساده کردن ریشگی ها بکار میرود .

تمرین

عبارتهای زیر را ساده کنید:

$\sqrt{18-9\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{54a^8}$ $\qquad$ $\sqrt{9x^3}$

$\sqrt{3}+\sqrt{27}$ $\qquad$ $\sqrt{20}-\sqrt{45}$

$\sqrt{45}-\sqrt{80}+2\sqrt{180}$

$2a\sqrt[8]{a^4}-3a\sqrt[6]{a^3}+9\sqrt{a^3}$

$3\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2000}-\sqrt[3]{250}$

$2\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{648}$

$\sqrt[3]{(x-y)^4}+m\sqrt[6]{x^2-2xy+y^2}+(x+y)\sqrt[3]{x-y}$

۲۳- توان ریشه ها - برای اینکه یکریشه را بیک توان برسانیم کافیست مقدار زیر ریشگی را بآن توان برسانیم (زیرا در حقیقت توان حالت مخصوصی است از ضرب)

یعنی
$$(\sqrt[m]{A})^n=\sqrt[m]{A^n}$$

تمرین

۱- هریک از عبارتهای زیر را بتوان سوم برسانید و حاصل را ساده کنید

$x\sqrt{x}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{x}$ $\qquad$ $\sqrt[6]{27}$ $\qquad$ $\sqrt{5}$

۲- هریک از عبارتهای زیر را بتوان پنجم برسانید و حاصل را ساده کنید:

$\sqrt{a}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{x^2}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{-4}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-16}$

۲۴- قضیّه - برای اینکه از ریشهٔ m اُم عددی ریشهٔ n ام استخراج شود کافی است که از عدد مفروض ریشهٔ mn ام استخراج گردد

یعنی
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[mn]{A}$$

برای اثبات کافی است که دو طرف این تساوی را بتوان mn برسانیم (طرف چپ را اوّل بتوان n و پس از آن بتوان m میرسانیم)

تمرین

هریک از ریشگی های مرکّب زیر را بریشگی ساده تبدیل کنید.

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ $\sqrt{\sqrt{a}}$ $\qquad$ $\sqrt{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\sqrt{x^2}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\sqrt{y}}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{\sqrt{27}}$

$\sqrt{2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\sqrt{m^5}}$ $\qquad$ $\sqrt{\sqrt[3]{y}}$

$\sqrt[5]{\sqrt[b]{x^c}}$ $\qquad$ $2\sqrt[3]{3\sqrt[3]{5}}$ $\qquad$ $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$

۲۵- تقسیم ریشه ها - در تقسیم دو ریشگی که شمارهٔ هر دو m است بهر مساوی است با ریشهٔ m اُم بهرِ مقدار زیر ریشگی بخشی بر مقدار زیر

ریشگی بخش یاب

یعنی :
$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

مثلاً
$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

و
$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{ab}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{ab}} \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

و درحالتیکه شمارهٔ ریشه ها مختلف باشند اوّل آنها راتحویل بیک شماره نموده

پس از آن مانندبالاعمل میکنیم :

مثلاً
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{25}}{\sqrt[6]{8}} = \sqrt[6]{\frac{25}{8}}$$

تمرین

درهریک ازتقسیم های زیرپس از ساده نمودن بهُر راحساب کنید

$5\sqrt{6} : \sqrt{3}$ $3\sqrt{12} : \sqrt{2}$ $\sqrt{27} : \sqrt{3}$

$\sqrt{5} : \sqrt[3]{3}$ $\sqrt{5ab} : \sqrt{6ab^2}$ $\sqrt{15} : \sqrt{30}$

$\sqrt{xy} : \sqrt[3]{x^2y^2}$ $\sqrt[3]{m^2x^2} : \sqrt[3]{m^2x^3}$

$(4\sqrt{5} + 10\sqrt{75}) : 3\sqrt{5}$ $(\sqrt{12} - \sqrt{8}) : \sqrt{2}$

$(2\sqrt{21} + 3\sqrt{14}) : 6\sqrt{7}$ $(3\sqrt{20} - 4\sqrt{70}) : 3\sqrt{50}$

$(\sqrt{xy^2} - \sqrt{x^2y}) : \sqrt{xy}$

۲۶ـ نمای برخهٔ ـ عمل های راجع بریشه هاکمال شباهت را باعمال راجع

ببرخه ها دارد (مثلاً هرگاه شمارهٔ ریشه و نمای مقدار ریشگی را دریک مقدار ضرب ویابریک مقدار تقسیم کنیم ریشه تغییر نمیکند همچنانکه هرگاه برخه نام و برخه شمار یک برخه را دریک مقدار ضرب و یا بریک مقدار تقسیم کنیم برخه تغییر نمیکند ـ همچنین است تحویل چند ریشگی بیک شماره مانند تحویل چند برخه بیک برخه نام وغیره)

درین مقایسه نمای مقدار زیرریشگی درحکم برخه شمار و شمارهٔ ریشگی درحکم برخه نام میشود

ضمناً می بینیم که $\sqrt{16}$ ویا $\sqrt[2]{2^4}$ رامیتوانیم بصورت $2^{\frac{4}{2}}$ بنویسیم (ازتقسیم شمارهٔ ریشه و نمای زیرریشگی بر عدد ۲)

همچنین
$$\sqrt[3]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{3}} = 5^4$$

بنابراین وقتیکه نمای زیرریشگی بر شمارهٔ ریشه بخش پذیر باشد میتوان ریشه را بصورت توانی نوشت که نمایش برخه باشد. برخه شمار این برخه شمارهٔ ریشه بود و برخه نامش مساوی نمای مقدار زیرریشگی است.

بطورکلی هرگاه p بر q بخش پذیر باشد نتیجه میشود :

$$\sqrt[q]{A^p} = A^{\frac{p}{q}} \qquad (1)$$

واگر p بر q بخش پذیرنباشد $A^{\frac{p}{q}}$ دارای معنا نیست، باوجود این برای عمومیت دادن دستور (۱) قرار براین شده است :

هر ریشه را بصورت توانی نویسند که نمایش برخه ای باشد با برخه نامی مساوی شمارهٔ ریشه و برخه شماری مساوی نمای مقدار زیر ریشگی

مثلاً بنابراین قرار میتوان نوشت :

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad و \quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}} \quad و \quad \sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

و این قرار با عمل های راجع بریشه ها و توانها منافاتی هم ندارد چنانکه

مثلاً $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = x$

و همچنین $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x$

یکی از فواید این تبدیل این است که عمل های راجع بریشه ها بعمل های راجع بتوان تبدیل میشود و میتوان تمام خاصیت هائیکه در ریشه ها گفته شد بوسیلهٔ عمل های راجع بتوان اثبات نمود

مثلاً برای اثبات قضیهٔ (شمارهٔ صفحهٔ ۳۵) میتوان چنین نوشت :

$$\sqrt[q]{A^p} = A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{mp}{mq}} = \sqrt[mq]{A^{mp}}$$

و همچنین برای تبدیل چند ریشگی بیک شماره وغیره .

پرسش های شفاهی

ریشگیهای زیر را بصورت توانی با نمای برخه بنویسید :

$5\sqrt{a^3}$ $\quad$ $x\sqrt[4]{25}$ $\quad$ $\sqrt{2}$

$10\sqrt[5]{x^3}$ $\quad$ $\sqrt[3]{a^2}$ $\quad$ $3\sqrt[3]{x}$

۲- توانهای زیر را بصورت ریشه بنویسید :

$3^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$ $\quad$ $2x^{\frac{1}{5}}$ $\quad$ $a^{\frac{1}{4}}$

$(3x^4)^{\frac{3}{4}}$ $\quad$ $a^{\frac{5}{4}}$ $\quad$ a^3 $\quad$ x^2

$2x^{-\frac{4}{3}}$ $\quad$ $3^{-\frac{2}{3}}$ $\quad$ $a^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ $6^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{2}{4}}$

۳- مقدار هریک از توانهای زیر را حساب کنید

$125^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $4^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $8^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ $4^{\frac{1}{2}}$

$(-64)^{-\frac{2}{3}}$ $\quad$ $(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $(-8)^{\frac{2}{3}}$

تمرین

۱- توانهای زیر را بساده ترین صورت بریشگی تبدیل کنید :

$8a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{15}{3}}$ $\quad$ $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $4(16x)^{\frac{1}{4}}$

$(16y)^{\frac{3}{4}}$ $\quad$ $a^{\frac{2}{b}} \cdot x^{\frac{3}{b}}$ $\quad$ $5^{\frac{3}{2}} \cdot am^{\frac{5}{4}}$

$m^{\frac{2}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$ $\quad$ $6a^{\frac{15}{4}} \cdot b^{\frac{12}{5}}$

۲- از روی تبدیل بتوان ریشگی های زیر را بساده ترین صورت خود بنویسید :

$$\left(\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\right)$$

$\sqrt[۳]{۲۴}$ $\qquad$ $\sqrt[۴]{x^{۲}y^{۶}}$ $\qquad$ $\sqrt[۱۲]{۸}$

$\sqrt[۶]{۲۵}$ $\qquad$ $۲\sqrt[۵]{۷۲۹}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۱۲۵۰}$

$$\sqrt[۶]{\frac{۴۹b^{۶}}{۳۶}}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳^{\frac{۱}{۲}}} = ۳^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۳}\right)$$

$\sqrt{۵\sqrt{۵\sqrt{۵}}}$ $\qquad$ $۲\sqrt[۳]{۳\sqrt[۲]{۳}}$ $\qquad$ $\sqrt[۴]{\sqrt{۲۷}}$

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{x^{\frac{m}{n}}}$$

۳ - خاصیت های راجع بریشه ها را از روی تبدیل بتوان ثابت کنید.

۴ - پهنهٔ (مساحت) یک لوزی ۵۱۲ متر مربع است مطلوبست درازای قطرهایش درصورتیکه قطر کوتاه $\frac{۳}{۷}$ قطر بلند باشد.

۵ - پهنهٔ مربعی ۶۲۵ متر مربع است درازای قطرش را بدست آورید.

۶ - نردبانی دارای ۱۱ پله است که فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۰٫۲۵ متر و فاصلهٔ پلهٔ آخر از انتهای نردبان ۰٫۲۳ متر و فاصلهٔ پلهٔ اوّل از ابتدا ۰٫۱۸ متر است نردبان را برابر دیوار قائمی تکیه دادیم بقسمی که انتهای آن برانتهای دیوار قرار گرفت و فاصلهٔ پایهٔ آن از پای دیوار ۱٫۴ متر شد بلندی دیوار چقدر است؟

۷ - زمینی است بشکل سه گوشهٔ متساوی الاضلاع بارتفاع ۱۸۰ متر - ارزش این زمین چنداست درصورتیکه هر هکتار آن ۲۷۰۰ ریال بیرزد؟

۸ - نقطهٔ A روی یکی از دو پهلوی زاویهٔ ۶۰° داده شده است برابر آن پهلو نقطه ای پیدا کنید بقسمی که از A و از پهلوی دیگر زاویه بیک فاصله باشد.

۹ - سه گوشه ای به پهلوهای a و b و c داده شده حساب کنید قطعه هائی را که برارتفاع روی پهلوها جدا میکند.

۱۰ - از یک سه گوشهٔ قائم الزّاویه پیرامون و یک پهلوی گوشهٔ قائمه معلوم است پهنهٔ آن را حساب کنید.

۱۱ - دو دایره متقاطعند شعاع های آنها R و R' و درازای خط دو مرکزشان d است درازای وتر مشترک آنها را حساب کنید.

۱۲ - از سه گوشهٔ متساوی الاضلاع درازای ارتفاع معلوم است پهنه اش را حساب کنید.

۲۷ - گویا کردن برخه نام گُنگ

- برای آسانی محاسبه بهتر آنستکه برخه نام یک عبارت برخه گُویا باشد.

مثلاً برای محاسبهٔ عبارت $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ میتوانیم اوّل مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ را بالقرّبت دلخواهی مثلاً تا $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ حساب کنیم

$$\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲\ldots$$

پس از آن بهر یک را بر این عدد بدست آوریم:

$$\frac{1}{1{,}414200}=0{,}707100000$$

میتوان نیز با ضرب کردن برخه نام و برخه شمار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ در $\sqrt{2}$ برخه نام را گویا نمود و پس از آن عمل تقسیم را انجا آورد از نیقرار:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1{,}414200}{2}=0{,}707100$$

و می بینیم راه دوم آسانتر از راه اول است.

برای گویا کردن یک برخه نام گنگ دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول - برخه نام بصورت $\sqrt[m]{A}$ است که در آن A عبارتیست گویا

مانند $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{a+x}}$

قاعده - درین قبیل برخه ها باید برخه نام و برخه شمار را در عبارتی ضرب کنیم که حاصل ضربش در برخه نام گویا گردد

مثلاً در $\frac{1}{\sqrt{3}}$ کافی است برخه نام و برخه شمار را در $\sqrt{3}$ ضرب کنیم و همچنین در $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ برخه نام و برخه شمار را در $\sqrt[3]{4}$ ضرب میکنیم از نیقرار:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[6]{3^3\times 4^2}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[6]{432}}{2}$$

و نیز برخهٔ $\frac{1}{\sqrt{a+x}}$ نوشته میشود:

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}}=\frac{\sqrt{a+x}}{a+x}$$

تمرین

برخه نام عبارتهای زیر را گویا کنید:

$$\frac{4}{3\sqrt{x}}\qquad \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\qquad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$$

$$\frac{3\sqrt{5ab^4}}{\sqrt{3ab^2}}\qquad \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\qquad \frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{c}}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{3}}\qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}\qquad \frac{\sqrt{m^3x}}{\sqrt{mx^3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\qquad \frac{\sqrt{50}}{\sqrt[3]{2}}\qquad \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{a}}$$

حالت دوم - برخه نام چند جملهٔ گنگ است

مانند $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ و $\frac{a}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$ و $\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c}$

درینجا نیز باید عبارتی یافت که حاصل ضربش در برخه نام گویا شود و برای این مقصود وقتیکه شمارهٔ ریشه های برخه نام فقط ۲ باشد از اتحاد

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

استفاده میکنیم

مثلا برای گویا نمودن برخه نام برخهٔ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کافی است برخه نام و برخه شمار را در مزدوج $2+\sqrt{3}$ یعنی در $2-\sqrt{3}$ ضرب کنیم

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

و نیز

$$\frac{a}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}=\frac{a(\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{5-12}=-\frac{a(\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{7}$$

پس هرگاه برخه نام بصورت کلی $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ یا $A \pm \sqrt{B}$ باشد (A گویاست و ممکن است چند جمله باشد) قاعدهٔ زیر را بکار میبریم:

۲۸ - قاعده - برخه نام و برخه شمار را در مزدوج برخه نام ضرب میکنیم و هرگاه برخه نام بیش از دو جملهٔ گنگ داشته باشد همین قاعده را چند بار (باندازهٔ لازم) تکرار میکنیم.

مثلاً برای گویا نمودن برخه نام $\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c}$ اوّل $\sqrt{a}+c$ را در حکم یکجمله گرفته از روی قاعدهٔ بالا عمل میکنیم

$$\frac{x}{\sqrt{a}+c-\sqrt{b}} = \frac{x[(\sqrt{a}+c)+\sqrt{b}]}{(\sqrt{a}+c)^2-b} = \frac{x(\sqrt{a}+c+\sqrt{b})}{a+c^2-b+2c\sqrt{a}}$$

حالا می‌بینیم که برخه نام بصورت $A \pm \sqrt{B}$ است که در آن $A = a+c^2-b$ و $\sqrt{B} = 2c\sqrt{a}$ میباشد بنابراین چون برخه نام و برخه شمار برخهٔ آخر را در مزدوج عبارت $(a+c^2-b)+2c\sqrt{a}$ و یا در $(a+c^2-b)-2c\sqrt{a}$ ضرب کنیم برخه نام گویا میشود

$$\frac{x}{\sqrt{a}+c-\sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a}+c+\sqrt{b})(a+c^2-b-2c\sqrt{a})}{(a+c^2-b)^2-4ac^2}$$

تمرین

برخه نام عبارتهای زیر را گویا نمائید:

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$ و $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$

$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ و $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ و $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-6}$ و $\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{5\sqrt{2}-6\sqrt{7}}$

$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ و $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$

$\frac{\sqrt{a+b}}{2-\sqrt{a+b}}$ و $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$\frac{9}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} = \frac{9\sqrt{3-\sqrt{3}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3-\sqrt{3}}\,(3+\sqrt{3})}{9-3}$$
$$= \frac{3\sqrt{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{3\sqrt{6(3+\sqrt{3})}}{2}$$

$\frac{12}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}$ و $\frac{10}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$ و $\frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

۲۹ - همچندی گنگ - گوئیم همچندی گنگ است وقتی که دارای عبارت گنگی شامل مجهول باشد

مانند

$$\sqrt{x-1} = x^2+5x-6$$

و

$$\sqrt{x}-2 = \sqrt{2x-1}$$

ولی همچندی $\sqrt{x^2} = 5$ گنگ نیست زیرا $\sqrt{x^2}$ گویاست و مساوی $+|x|$ است.

۳۰ - قاعدهٔ حلّ همچندی گنگ - برای حلّ همچندی گنگ باید اوّل آن همچندی را تبدیل به همچندی گویا کنیم یعنی عبارت گنگ را از بین ببریم پس از آن همچندی

حاصل راازروی قاعده هائیکه داریم حل کنیم.

برای این کار ابتدا جمله های متشابه دو طرف همچندی را جمع می کنیم پس ازآن برای ازبین بردن عبارت گنگ (وقتیکه عبارتهای گنگ همچندی دارای یک شمارهٔ ریشه باشند) دوطرف همچندی راتوان شمارهٔ ریشه میرسانیم گاه برای ازبین بُردن عبارتهای گنگ یک همچندی لازم میشود که دوطرف راچند بار (باندازهٔ لازم) بتوان برسانیم.

۳۱- تبصره - چون دوطرف همچندی بتوان جفت رسد همچندی حاصل عموماً باهمچندی اصلی هم ارزنیست (*) یعنی ممکن است جوابهای خارجی داشته باشد لذا باید جوابهای همچندی حاصل رادرهمچندی داده شده امتحان نمود

مثال ۱- همچندی $\sqrt{x-7}-2=0$ راحل کنید جملهٔ گنگ راتنهاگذارده دوطرف همچندی راتوان دوّم میرسانیم خواهیم داشت

(*) زیرااگر فرض کنیم همچندی اصلی $A=B$ باشد همچندی جدید بصورت $A^2=B^2$ خواهد بود واین همچندی جدید علاوه برریشه های همچندی اصلی ریشه های همچندی $A=-B$ را هم دربرخواهد داشت زیراچون همچندی $A=-B$ راتوان دوّم رسانیم نیز $A^2=B^2$ بدست میآید.

مثال - درهمچندی $x=5$ که ریشه آن ۵ است اگر دوطرف راتوان دُوّم رسانیم همچندی $x^2=25$ بدست میآیدکه علاوه برریشهٔ ۵ ریشهٔ ۵- یعنی ریشهٔ همچندی $x=-5$ راهم دربردارد

$x-7=4$ وازآنجا $x=11$

تحقیق - چون ۱۱ درهمچندی اصلی صدق میکند بنابراین جواب همچندی گنگ است

مثال ۲- مطلوبست حلّ همچندی $2x=5+\sqrt{4x^2-5}$ رشگی راتنها گذارده دوطرف راتوان دو میرسانیم پس ازساده کردن خواهیم داشت

$$x=\frac{3}{2}$$

تحقیق - چون بجای x درهمچندی اصلی $\frac{3}{2}$ گذاریم تساوی غلط $3=2+5$ بدست میآید بنابراین همچندی اصلی جواب ندارد و $\frac{3}{2}$ جواب خارجی آنست

مثال ۳- همچندی گنگ زیر راحل کنید:

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=1$$

بهتراین است که رشگی دوّم رابطرف دیگر همچندی برده دوطرف رابتوان دوّم رسانیم دراینصورت خواهیم داشت:

$$x+5=1+x-4+2\sqrt{x-4}$$

وچون رشگی رادریکطرف تنهاگذارده دوطرف راباز بتوان دُوّم رسانیم پس ازساده کردن حاصل میشود $x=20$

تحقیق - جواب ۲۰ درهمچندی اصلی صدق نموده وبنابراین جواب آنست

تمرین

معادله‌های گنگ زیر را حل کنید:

$5-\sqrt[3]{x}=8$ $\sqrt{x}+5=7$

$3+2\sqrt{x}=5$ $\sqrt{3x}-1=5$

$\sqrt[3]{7a-6}+6=10$ $\sqrt{3x-5}+4=5$

$4\sqrt{x}-7=3\sqrt{x}-1$ $\sqrt{3y-7}=\sqrt{4y+9}$

$5-\sqrt{4x^2-5}=2x$ $\sqrt{x-11}-3\sqrt{2x-5}=0$

$\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ $\sqrt{13+4\sqrt{x-1}}=5$

$2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$ $\sqrt[4]{x^2-7x+19}=\sqrt{x-3}$

$$\frac{7}{\sqrt{x}}+\frac{5}{3}=\frac{6}{\sqrt{x}}+2$$

$\sqrt{7x+2}=\dfrac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$ $\dfrac{9}{5+\sqrt{7}}=\dfrac{4}{8-\sqrt{x}}$

$$\sqrt{6x+4+\sqrt{x^4+10x^2+5x-1}}=x+3$$

$$3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=1$ $\sqrt{x+9}-\sqrt{x}=1$

$$2\sqrt{y+5}+3\sqrt{y-7}=\sqrt{25y+14}$$

$$3\sqrt{z+3}-2\sqrt{z-12}=5\sqrt{z-9}$$

$$\sqrt{a-7}+\sqrt{a-2}-\sqrt{a-10}=\sqrt{a+5}$$

ه - نسبت و تناسب

۳۲- نسبت و تناسب - بهر مقدار جبری a بر b را نسبت بین a و b گویند و آنرا چنین نویسند $\frac{a}{b}$ یا $a:b$ (a و b را دو جزء نسبت $\frac{a}{b}$ نامیم) و بعکس هر برخه را میتوان نسبت بین برخه شمار و برخه نام نامید مانند نسبت‌های $\frac{3}{4}$ و $\frac{x+3}{x-a}$ و $\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{3}}$

عمل‌های راجع به نسبت‌ها همان عملهای راجع به بهر و برخه‌ها است مثلاً هرگاه دو جزء نسبت را در عددی ضرب کنیم و یا بر عددی تقسیم کنیم نسبت تغییر نمیکند

۳۳ - هرگاه بخواهیم نسبت بین دو چندی همجنس را معین کنیم یعنی آن دو را باهم بسنجیم باید هر دو را با یکه همان چندی بسنجید

مثلاً برای تعیین نسبت بین ۵ کیلومتر و هفت متر چون هر دو را با متر بسنجیم نسبت بین آنها چنین میشود: $\dfrac{5000}{7}=\dfrac{5\ \text{کیلومتر}}{7\ \text{متر}}$

ولی نمیتوان نسبت بین دو چندی ناجور را معین کرد یعنی دو چندی ناجور با یکدیگر سنجیده نمی‌شوند.

تمرین

۱- معین کنید نسبت بین یک فرسخ ۶ هزار ذرعی را با یک کیلومتر (یکذرع تقریباً مساوی ۱۰۴ سانتیمتر است)

۲- معین کنید این دو نسبت کدام یک بزرگترند:

$$\frac{16}{23} \quad \text{و} \quad \frac{24}{31}$$

۳- ثابت کنید وقتی که a مثبت است این نامساوی برقرار است

$$\frac{a}{a+3} < \frac{a+4}{a+7}$$

۴- معین کنید وقتی که a مثبت است کدام یک ازین دو نسبت بزرگترند:

$$\frac{7+2a}{7+3a} \quad \text{و} \quad \frac{7+4a}{7+5a}$$

۵- هرگاه بر دو عدد مثبت عدد مثبتی بیفزائیم یا از آن دو عدد عدد مثبتی کم کنیم چه تفاوتی در نسبت بین آن دو عدد پیدا میشود؟

۳۴- **تناسب** - هرگاه دو نسبت با هم مساوی باشند آن دو نسبت را متناسب خوانند و تشکیل یک تساوی میدهند که آن را تناسب گویند مثلاً میگوئیم چهار عدد a و b و c و d تشکیل یک تناسب میدهند وقتی که نسبت بین دو عدد اول بترتیب مساوی نسبت بین دو عدد آخر باشد و آن را چنین نویسند

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (1)$$

a و d (اولی و آخری) را دو کرانه (طرفین) و b و c (دومی و سومی) را دو میان (وسطین) تناسب گویند و چهار مقدار a و b و c و d را

چهار جزء تناسب خوانند

مثلاً $\frac{10.5}{18} = \frac{7}{12}$ و $\frac{-17\frac{1}{3}}{16} = \frac{13}{-12}$

ممکن است یکی از چهار جزء تناسب یک باشد مانند

$$2 = \frac{4}{2} \quad \text{و} \quad m = \frac{x}{y}$$

که بصورت تناسب چنین نوشته میشوند:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} \quad \text{و} \quad \frac{m}{1} = \frac{x}{y}$$

بنابراین میتوان هر تساوی را بصورت تناسب درآورد مانند $x=2$ که میتوان نوشت $\frac{x}{1} = \frac{2}{1}$

۳۵- در هر تناسب حاصل ضرب دو کرانه مساویست با حاصل ضرب دو میان.

یعنی از تناسب (۱) خواهیم داشت $ad = bc$

برای اثبات چون دو نسبت تناسب (۱) را بیک برخه نام تبدیل کنیم نتیجه میشود

$$\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db} \quad \text{و از آنجا} \quad ad = bc \qquad (2)$$

نتیجه - بین چهار جزء تناسب a و b و c و d غیر از تناسب (۱) میتوان یک عده تناسب های دیگری نوشت برای این کار کافی است تساوی (۲) را بکار بریم

اوّل - چون دو طرف تساوی (۲) را بر dc تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{ad}{dc} = \frac{bc}{dc} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (۳)$$

بامقایسه با تناسب (۱) می بینیم که **در یک تناسب میتوان جای دو میانرا با هم عوض نمود.**

دوّم - چون دو طرف تساوی (۲) را بر ba تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad (۴)$$

یعنی: **میتوان در یک تناسب جای دو کرانه را با هم عوض نمود.**

سوّم - چون دو طرف تساوی (۲) را بر ac تقسیم کنیم نتیجه میشود

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (۵)$$

یعنی: **میتوان دو نسبت یک تناسب را وارونه نمود.**

یادآوری - چنانکه دیدیم هر تساوی را میتوان بصورت تناسب نوشت (بطوریکه در هر طرف فقط یک نسبت باشد)

مثلاً تساوی $\frac{14}{8} = 1 + \frac{3}{4}$ را میتوان بصورت این تناسب نوشت
$\frac{14}{8} = \frac{1+\frac{3}{4}}{1}$ که اگر دو طرف تساوی آنرا وارونه کنیم خواهیم داشت
$\frac{8}{14} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}}$ و یا $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ ولی هرگز نباید برای وارونه کردن
دو طرف تساوی $\frac{14}{8} = 1 + \frac{3}{4}$ چنین نوشت $\frac{8}{14} = \frac{4}{3} + 1$ یعنی

$\frac{8}{14} = \frac{7}{3}$ که غلط است.

همچنین در همچندی $\frac{6}{x} - 1 = \frac{6}{2x-1}$ دو طرف را نباید اینطور وارونه نمود:

$$\frac{x}{6} - 1 = \frac{2x-1}{6}$$

که غلط است و وارونهٔ صحیح آن چنین است:

$$\frac{1}{\frac{6}{x}-1} = \frac{2x-1}{6}$$

همچندی اصلی دارای دو جواب ۲ و $\frac{3}{2}$ است درصورتیکه اگر از راه وارونهٔ غلط همچندی

$$\frac{x}{6} - 1 = \frac{2x-1}{6}$$

را حل کنیم فقط یک جواب $x = -\frac{5}{2}$ میرسیم که آنهم درست نیست.

چهارم - **ترکیب نسبت** - اگر بر دو طرف تناسب (۱) عدد یک بیفزائیم
خواهیم داشت

$$1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{d}$$

یا

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (۶)$$

درین صورت گویند برای بدست آوردن تناسب (۶) در تناسب (۱) ترکیب نسبت شده است.

پنجم - **تفضیل نسبت** - اگر از دو طرف تناسب (۱) عدد یک را کم کنیم
حاصل میشود

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (۷)$$

دراینصورت گویند در تناسب (۱) تفضیل نسبت شده است

ششم - از تقسیم دو طرف (۶) و (۷) بر یکدیگر این تناسب بدست میآید

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \qquad (8)$$

که از ترکیب و تفضیل تناسب (۱) بدست آمده.

هفتم - از وارونه نمودن هر یک ازین تناسب ها و یا از عوض نمودن جای دو کرانه باهم و یا جای دو میان باهم تناسب های دیگری بدست میآید.

مثال ۱ - این همچندی را حل کنید $\frac{1}{x} = \frac{5}{6}$

چون دو طرف این تناسب را وارونه کنیم خواهیم داشت $x = \frac{6}{5}$

مثال ۲ - همچندی زیر را حل کنید

$$\frac{x-2}{2} = \frac{1}{3}$$

اگر این تناسب را ترکیب نسبت کنیم چنین میشود $\frac{x}{2} = \frac{4}{3}$ و از آنجا

$$x = \frac{8}{3}$$

مثال ۳ - این همچندی را حل کنید $\frac{x+5}{x-5} = \frac{1}{11}$

از ترکیب و تفضیل این نسبت خواهیم داشت $\frac{2x}{10} = \frac{12}{-10}$ و از آنجا

$$x = -6$$

مثال ۴ - در همچندی $\frac{x+a}{x-a} = t$ مجهول x را حساب کنید

پس از ترکیب و تفضیل نسبت چنین میشود $\frac{2x}{2a} = \frac{t+1}{t-1}$

و از آنجا $x = \frac{a(t+1)}{t-1}$

۳۶ - چهارم جزء تناسب - در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ مقدار d را چهارم جزء این تناسب گویند که سه جزء اول آن بترتیب a و b و c میباشد

هر کدام از جزء های دیگر را میتوان چهارم جزء بین سه جزء دیگر گرفت و ترتیب سه جزء دیگر از روی تناسب (۱) بدست میآید

مثلاً c چهارم جزء تناسب بین b و a و d است زیرا کافی است تناسب (۱) را وارونه کنیم: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

و همچنین b چهارم جزء این تناسب است $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

و نیز a چهارم جزء تناسب $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ است.

مثال - حساب کنید چهارم جزء تناسب بین ۲ و ۳ و ۸ را.

چون این چهارم جزء را به x بنمائیم خواهیم داشت $\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$ که مقدار آن مساوی ۱۲ است.

۳۷ - میانهٔ هندسی (واسطه هندسی) - هرگاه در یک تناسب دو میان (یا دو کرانه) باهم مساوی باشند هر کدام از دو میان (یا دو کرانه) را واسطه هندسی بین دو کرانه (یا دو میان) گویند

مثلاً در تناسب $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$ عدد ۴ میانهٔ هندسی است بین ۸ و ۲
وبطور کلّی در تناسب $\frac{a}{m}=\frac{m}{b}$ عدد m میانهٔ هندسی است بین دو مقدار a و b

وبعکس میانهٔ هندسی بین دو عدد a و b عددی است مانند m بقسمی که $\frac{a}{m}=\frac{m}{b}$ باشد ویا بنا بر شمارهٔ (۳۵) $m^2=ab$ واز آنجا

$$m=\pm\sqrt{ab}$$

یعنی m یا میانهٔ هندسی بین دو عدد a و b ازحیث قدر مطلق مساوی ریشهٔ دوّم حاصل ضرب آن دو عدد است ودارای دو جواب قرینه میباشد.

چنانکه میانهٔ هندسی بین ۴ و ۹ عدد ۶+ یا ۶- است

تمرین

۱- از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ این تناسب ها را بدست آورید:

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{d} \qquad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{5a}{b}=\frac{5c}{d}$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{c^2-d^2}{d^2} \qquad \frac{5a+b}{5a-b}=\frac{5c+d}{5c-d}$$

$$\frac{7a^2-3b^2}{5ab}=\frac{7c^2-3d^2}{5cd} \qquad \frac{a^2-b^2}{2ab}=\frac{c^2-d^2}{2cd}$$

۲- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ باشد ثابت کنید که

$$\frac{\pm a\pm c\pm e}{\pm b\pm d\pm f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

چون مقدار مشترک $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ را به q بنامیم نتیجه میشود

$a=bq$ و $c=dq$ و $e=fq$

از جمع جبری این تساویها تساوی زیر بدست میآید:

$$\pm a\pm c\pm e=q(\pm b\pm d\pm f)$$

چون دو طرف این تساوی را برضریب q تقسیم کنیم حکم ثابت میشود

یعنی $$\frac{\pm a\pm c\pm e}{\pm b\pm d\pm f}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

۳- این همچندیها را حل کنید:

$$(x+3):(x-5)=12:23$$

$$(2x+1):(4x-3)=4x:(2x-1)$$

$$(a+b):(a-b)=(c+x):(c-x)$$

$$\frac{a+c+e}{b+d+x}=\frac{a}{b}$$

۴- بین سه عدد ۸ و ۲۰ و ۳۲ چهارم جزء تناسب پیدا کنید

همینطور بین ac و ab و bc « « «

« a^3 و ab و $5a^2b$ « « «

۵- بین دو عدد ۱۶ و ۲۵ میانهٔ هندسی پیدا کنید

همینطور ، $12mx^4$ و $3m^3$ ، ،

۶- مبلغی را میخواهیم بین دو نفر به نسبت ۲ و ۳ بخش کنیم میدانیم سهم اولی ۴۰۰ ریال شده است معین کنید سهم دوّمی و مبلغ بخش کردنی را .

۷- با ۱۵۰ ریال ۱۷٫۵ متر پارچه خریدیم معلوم کنید قیمت ۲۵ متر از همین پارچه را (بوسیلهٔ تشکیل تناسب)

۸- راست گوشه ای (مربع مستطیلی) بدرازای a و پهنای b هم ارز مربعی است . ثابت کنید که پهلوی این مربع میانهٔ هندسی بین a و b است .

۹- پهلوهای سه گوشه ای مساویست با ۱۵٫۷۵ متر و ۱۰٫۲۵ متر و ۸٫۴۵ متر حساب کنید تکه هائیکه نیمساز (منصّف) هر گوشه روی پهلوی مقابل آن گوشه جدا میکند .

۱۰- میدانیم که نسبت بین پهنه های دو چند پهلوی متشابه مساوی نسبت بین توانهای دوّم دو پهلوی متناظر آنها است . اگر دو پهلوی متناظر آنها بترتیب مساوی ۱۵ سانتیمتر و ۲۱ سانتیمتر باشد و پهنهٔ چند پهلوی دوّم ۶۴۸ سانتیمتر مربع باشد حساب کنید مساحت اوّلی را

۱۱- میدانیم مساحت سطح کرهٔ یکه شعاعش R باشد $4\pi R^2$ است و حجمش $\frac{4}{3}\pi R^3$ میباشد . اگر S_1 و S_2 مساحت سطح دو کره و V_1 و V_2 بترتیب حجم آنها و R_1 و R_2 شعاع آنها و d_1 و d_2 قطرهای آنها باشد تساویهای زیر را ثابت کنید :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{d_1^3}{d_2^3} \quad , \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad ,$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1^{\frac{3}{2}}}{S_2^{\frac{3}{2}}}$$

۱۲- شعاع کره خورشید ۱۰۹ برابر شعاع کرهٔ زمین است معیّن کنید نسبت بین مساحت سطح آنها و نسبت بین حجم آنها را .

۱۳- در مثلثی اوّلاً ارتفاع وارد بر ضلع a مساوی ۱۸٫۳۲ متر است بچه فاصله از ضلع a خطّی موازی این ضلع رسم شود تا مساحت مثلّثِ حاصل $\frac{1}{4}$ مساحت مثلّث مفروض گردد ؟

ثانیاً اگر ضلع b مساوی ۲۵٫۳۶ متر باشد حساب کنید تکّه های آن را که بوسیلهٔ این خطّ موازی جدا شده است .

تمرین فصل اوّل

۱- اگر $x + y + z = 0$ باشد ثابت کنید که

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

۲- عبارت

$$x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$$

را بحاصل ضرب سازه های اول تجزیه کنید .

۳- ثابت کنید که عبارت

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$$

بازاء $a+b+c=0$ مساوی ۹ است و بازاء $c=\pm(a-b)$ مساوی ۱ است.

۴- درستی تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$$

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$ و

بفرض $A^2 > B$.

۵- تحقیق کنید آیا عدد $3+\sqrt{3}$ جواب بچندی $x^2-6x-4=0$ هست یا نیست

همینطور $\frac{\sqrt{2}-2}{3}$ « « « $3x^2-4x+2=0$ «

« $\frac{1}{7}(1\pm\sqrt{22})$ « « « $7x^2-2x-3=0$ «

« $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ « « « $x^3+3x-2=0$ «

۶- اگر a و b و c اندازهٔ درازای پهلوهای سه گوشه ای باشند و S پهنهٔ (مساحت) آن و p نصف پیرامون (محیط) آن باشد از روی دستور

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

نخست وقتیکه هر سه پهلوی سه گوشه مساوی a است پهنه و ارتفاع آنرا حساب کنید

دوّم وقتیکه $a=b$ است پهنه و همچنین ارتفاع وارد بر پهلوی c را حساب کنید.

سوّم ثابت کنید که بفرض $a^2=b^2+c^2$ پهنهٔ سه گوشه مساوی $\frac{1}{2}bc$ میشود.

چهارم بازاء $a=4$ و $b=8$ و $c=10$ پهنه را تا $\frac{1}{100}$ تقریب حساب کنید.

۷- بوسیلهٔ تبدیل بتوان با نمای برخهٔ عبارت

$$\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2\sqrt[3]{a^2b^4}}$$

را ساده کنید.

۸- این عبارت را حساب کنید

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$$

۹- از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تناسبهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}=\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}} \qquad \frac{pa+qb}{pc+qd}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$$

۱۰- اگر

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}$$

و

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

باشد درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=\frac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}$$

۱۱- عبارت $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ را ساده کنید وقتیکه

$a^2 = b^2 + c^2 - bc$ و یا $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}$

۱۲- حاصل عبارت زیر را بدست بیاورید :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})$$

۱۳- a و b را طوری بگیرید که $x^4 + ax^3 + bx^2 + 12x + 4$ توان دوم یک چندجمله باشد.

۱۴- ثابت کنید که چندجمله $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ توان دوم یک چندجمله است.

۱۵- عبارتهای $x^3 - 2x^2 - 9x - 1$ و $x^3 - 2x^2 - 8x - 4$ را حساب کنید وقتی که x را $2+\sqrt{5}$ و یا $2-\sqrt{5}$ بگیریم.

۱۶- آیا تساوی زیر درست است ؟

$$\frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} + \frac{a-b}{1+ab} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

۱۷- a و b را طوری بگیرید که $x^3 + ax^2 + bx - 6$ بر $(x-1)(x-2)$ بخش پذیر باشد و بهر را بدست بیاورید.

۱۸- عبارت زیر را بحاصل ضرب چند سازه تبدیل کنید :

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$

۱۹- برخهٔ زیر را ساده کنید :

$$\frac{a^5(b-c) + b^5(c-a) + c^5(a-b)}{a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)}$$

۲۰- ثابت کنید که $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ بر $x(x+1)(2x+1)$ بخش پذیر است.

۲۱- برخهٔ زیر را ساده کنید :

$$\cfrac{x-1}{2x-3-\cfrac{x+2}{1+\cfrac{6}{3x-2-\cfrac{2x}{1-\cfrac{1}{x+1}}}}}$$

۲۲- حساب کنید $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ را وقتیکه $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ باشد.

فصل دوم - ناهمچندیها و بحث همچندیهای حرفی

الف - نامساوی و ناهمچندی

۳۸ - تعریف: نامساوی تشکیل شده است از دو عبارت جبری که بوسیله یکی ازین دو نشانه ($<$ یا $>$) ازهم جدا شده باشند

مانند $3+5 > 2-7$ و $7 > 0$ و $a-1 < a+2$ و $x-a < b+1$

وقتی نامساوی را نامساوی عددی گویند که دو عبارت آن از عددهای جبری تشکیل شده باشد مانند دو مثال اول

وچنانکه در کتاب اول گفته شده است نامساویها بطور کلی دارای خاصیتهای زیراست

اول - میتوان بر دو طرف یک نامساوی مقداری افزود ویا از هر دو طرف یک مقدار کاست بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند یعنی طرفیکه بزرگتر بوده بزرگتر میماند

دوم - میتوان دو طرف نامساوی را در عدد مثبت ضرب نمود (ویا بر یک عدد مثبت تقسیم نمود) بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند

سوم - چون دو طرف نامساوی در عدد منفی ضرب شود (ویا بر عدد منفی تقسیم شود) جهت نامساوی تغییر میکند

چهارم - بفرض اینکه هیچکدام از دو طرف نامساوی صفر نباشد هرگاه دو طرف نامساوی را وارونه کنیم جهت نامساوی تغییر میکند جز وقتی که نشانه دو طرف مختلف باشد.

مثال $5 < 7$ اگر دو طرف را وارونه کنیم میشود $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$

$-5 > -7$ « $-\frac{1}{5} < -\frac{1}{7}$

$5 > -7$ « $\frac{1}{5} > -\frac{1}{7}$

$-5 < 7$ « $-\frac{1}{5} < \frac{1}{7}$

۳۹ - تعریف - چند نامساوی را هم سو گویند وقتی که طرفهای راست همه بزرگتر (یا کوچکتر) از طرفهای چپ آنها باشد

مثلاً نامساویهای $5 > 2$ و $-3 > -7$ و $x-1 > 2$ هم جهتند

واین دو مساوی $\frac{1}{7} < 3$ و $-\frac{2}{3} > -5$ هم سو نیستند.

۴۰ - توان تاق یک نامساوی - چون دو طرف یک نامساوی را بتوان تاق برسانیم این دو توان تشکیل یک نامساوی میدهد هم جهت با همان نامساوی

مثال - دو طرف نامساوی $\frac{1}{3} > -2$ را بتوان سه میرسانیم این نامساوی بدست میآید $\frac{1}{27} > -8$

۴۱ - توان جفت یک نامساوی - اولاً اگر دو طرف یک نامساوی مثبت باشد وآنها را بتوان جفتی برسانیم این دو توان تشکیل یک نامساوی هم جهت با

آن نامساوی میدهد

مثلاً اگر دو طرف نامساوی $\frac{2}{5} < 3$ را بتوان دوم برسانیم این نامساوی هم جهت پیدا میشود $\frac{4}{25} < 9$

ثانیاً هرگاه دو طرف منفی باشند توان جفت آنها تشکیل یک نامساوی میدهد که هم سو با نامساوی مفروض نیست

مثلاً توان دوم دو طرف نامساوی $-\frac{2}{7} > -\frac{1}{3}$ تشکیل این نامساوی را میدهد :

$$\frac{4}{49} < \frac{1}{9}$$

ثالثاً اگر دو طرف بهم نشانه نباشند توان جفت آنها تشکیل یک نامساوی میدهد که جهتش از روی قدر مطلق آنها معلوم میشود

مثلاً چون دو طرف نامساوی $-5 < 3$ را بتوان دوم رسانیم حاصل میشود $25 > 9$

$-2 < 3$ ، $4 < 9$

درحالت مخصوص که قدر مطلق دو طرف نامساوی مساوی باشد توان جفت آنها تشکیل یک تساوی میدهد مثلاً $-3 < 3$ را چون بتوان دوم برسانیم حاصل میشود

$$9 = 9$$

۴۲ - نامساوی حرفی - چون بحرف x مقدارهای عددی مثلاً بزرگتر از ۵ بدهیم درینصورت بین x و ۵ این نامساوی برقرار میشود $x > 5$

و معنای آن این است که مقدار عددی x باید بزرگتر از ۵ باشد مثلاً میتواند $5\frac{1}{4}$ یا ۱۰ و .... باشد و معلومست که اگر به x مقدارهائی کوچکتر از ۵ یا مساوی ۵ بدهیم نامساوی درست نیست.

همچنین در نامساوی $2x - 3 < 1$ اگر به x مقدارهای کوچکتر از ۲ بدهیم نامساوی درست است و بازاء مقدارهای بزرگتر از ۲ یا مساوی ۲ نامساوی غلط میشود.

نامساویهای مانند دو نامساوی بالا را ناهمچندی گوئیم و مقدارهای عددی را که باید بجای x (مجهول ناهمچندی) بگذاریم تا نامساوی درستی هم جهت با آن تشکیل شود جوابهای ناهمچندی گویند چنانکه جوابهای ناهمچندی اول تمام عددهای بزرگتر از ۵ میباشد و در ناهمچندی دوم تمام عددهای کوچکتر از ۲ است.

این جوابها را بصورت زیر مینمائیم: در اولی $x > 5$ و در دومی $x < 2$

۴۳ - ناهمچندیهای هم ارز - دو ناهمچندی را هم ارز گویند وقتیکه هر دو دارای جوابهای مساوی باشند مانند $x - 3 > 0$ و $2x > 6$

چون ناهمچندی در حقیقت همان نامساوی عددیست بنابراین دارای تمام خواص نامساویهای عددیست پس با رعایت آنخواص (نمرهٔ ۳۸) میتوان از روی یک ناهمچندی ناهمچندیهای هم ارز با آنرا تشکیل داد:

اول - هرگاه بر دو طرف یک ناهمچندی مقداری بیفزائیم یا از دو طرف مقداری

کم کنیم ناهمچندی هم ارز ناهمچندی مفروض بدست میآید.

نتیجه - میتوان جمله ای را از یکطرف ناهمچندی بطرف دیگر برد بشرط اینکه نشانهٔ آنرا تغییر داد.

مثال - در ناهمچندی $5x - 3 < 4x + 2$ چون ۳- را بطرف دوّم ببریم (یعنی بر دو طرف ۳ بیفزائیم) ناهمچندی هم ارزی بصورت $5x < 4x + 5$ بدست میآید و نیز اگر $4x$ را بطرف اوّل ببریم این نامساوی هم ارز بدست میآید $x < 5$

دوّم - چون دو طرف یک ناهمچندی را در عدد مثبتی ضرب و بر آن تقسیم کنیم ناهمچندی هم ارز و هم جهت با ناهمچندی مفروض بدست میآید

مثلاً چون دو طرف ناهمچندی $-3 < \frac{x}{2}$ را در عدد ۲ ضرب کنیم ناهمچندی $-6 < x$ بدست میآید که با آن ناهمچندی هم ارز است همچنین در ناهمچندی $3x > -7$ چون دو طرف را بر ۳ تقسیم کنیم حاصل میشود $x > -\frac{7}{3}$

و اگر دو طرف ناهمچندیرا در عدد منفی ضرب و یا بر عدد منفی تقسیم کنیم میدانیم که جهت ناهمچندی تغییر میکند و ناهمچندی حاصل هم ارز با ناهمچندی مفروض خواهد بود

مثلاً اگر دو طرف ناهمچندی $-\frac{x}{5} < \frac{1}{7}$ را در عدد ۵- ضرب کنیم حاصل میشود

$x > -\frac{5}{7}$

و همچنین اگر در ناهمچندی $-3x < -12$ دو طرف را بر ۳- تقسیم کنیم این ناهمچندی بدست میآید $x > 4$

۴۴ - ناهمچندی یک مجهولی درجهٔ اوّل - هرگاه جمله‌های مجهول یک ناهمچندی را بیک طرف و معلوم‌ها را بطرف دیگر ببریم و هر طرف را ساده کنیم اگر ناهمچندی حاصل بیکی از دو صورت $ax < b$ و یا $ax > b$ درآید (که در آن a و b مقدارهای عددی معلومی هستند) آن ناهمچندیرا ناهمچندی یک مجهولی درجهٔ اوّل گویند.

حلّ ناهمچندی یک مجهولی - حلّ ناهمچندی یک مجهولی بدست آوردن عددهائیست که چون بجای مجهول آن ناهمچندی گذارده شود تشکیل نامساوی عددی درستی بدهد

حلّ ناهمچندی $ax < b$. برای تعیین جوابهای این ناهمچندی کافی است که دو طرف را بر a (ضریب x) تقسیم نمائیم دو حالت اتفاق میافتد اگر a مثبت باشد جواب ناهمچندی چنین است $x < \frac{b}{a}$ و اگر a منفی باشد حاصل میشود $x > \frac{b}{a}$

مثال ۱ - ناهمچندی $4x - 5 < 2x + \frac{3}{4}$ را حلّ کنید:

اوّل مجهول را بیک طرف و معلومها را بطرف دیگر میبریم نتیجه میشود:

$$4x - 2x < 5 + \frac{3}{4}$$

و یا $2x < \frac{23}{4}$ و از آنجا $x < \frac{23}{8}$

مثال ۲- ناهمچندی $\frac{2x-1}{3} + 5 < \frac{3x-2}{2} - 1$ را حل کنید

اوّل دو طرف را در ۶ (کوچکترین مضرب برخه نامها) ضرب میکنیم حاصل میشود

$$4x - 2 + 30 < 9x - 6 - 6$$

و یا $4x - 9x < -12 - 28$ و یا

$-5x < -40$ و از آنجا $x > 8$

تبصرهٔ ۱- حلّ ناهمچندی $b > ax$ مانند حلّ ناهمچندی $b < ax$ است یعنی کافیست دو طرف آنرا بر a تقسیم کنیم.

تبصرهٔ ۲- هرگاه پس از بردن جمله های مجهول بیک طرف مجموع آنها صفر شد (یعنی $a = 0$) دراینصورت ناهمچندی تبدیل بیک نامساوی عددی میشود که اگر آن نامساوی درست باشد تمام عددها جواب ناهمچندی است و درغیر اینحالت ناهمچندی غلط است.

مثال- این ناهمچندی را حل کنید

$$2mx - 7 < 3x + 5m$$

که در آن x مجهول و m نمایش مقدار معلومی است

$3x$ را بطرف اوّل و ۷ را بطرف دوّم برده ساده میکنیم حاصل میشود:

$$(2m - 3)x < 5m + 7 \qquad (1)$$

چون m میتواند مقدارهای مختلف بگیرد سه حالت اتفاق میافتد:

اوّل اگر $0 < 2m - 3$ باشد یعنی $\frac{3}{2} < m$ جواب ناهمچندی بالا چنین است

$$x < \frac{7 + 5m}{2m - 3}$$

دوّم ممکن است $\frac{3}{2} > m$ باشد دراینصورت از تقسیم دو طرف ناهمچندی (۱) بر $2m - 3$ جهت ناهمچندی تغییر میکند بنابراین جواب ناهمچندی چنین میشود:

$$x > \frac{7 + 5m}{2m - 3}$$

سوّم ممکن است $\frac{3}{2} = m$ شود دراینصورت ضریب x در ناهمچندی (۱) صفر است و دیده میشود که نامساوی درستی بدست میآید بنابراین بازاء $\frac{3}{2} = m$ تمام عددها جواب ناهمچندی بالا میباشد

تمرین

چند نامساوی بدلخواه برگزیده خواص زیر را تحقیق کنید:

۱- درچند نامساوی مجموع طرفهای بزرگتر بزرگتر است از مجموع طرفهای کوچکتر.

۲- هرگاه جهت دو نامساوی مختلف باشد اگر طرف راست نامساوی دوّم را از طرف راست نامساوی اوّل و طرف چپ آنرا از طرف چپ نامساوی اوّل کم کنیم دو مانده

تشکیل یک نامساوی میدهد هم جهت با نامساوی اوّل .

۳- اگر دو نامساوی را در هم ضرب کنیم باین معنی که طرفهای راست را در هم وطرفهای چپ را در هم ضرب کنیم دو حاصل ضرب بدست میآید و چند حالت باید در نظر گرفت اولاً اگر دو نامساوی هم جهت بوده وطرفهای آنها مثبت باشند دو حاصل ضرب تشکیل یک نامساوی هم جهت با آنها میدهد ثانیاً اگر دو نامساوی هم جهت بوده وطرفهای آنها همه منفی باشند دو حاصل ضرب تشکیل یک نامساوی میدهد که جهتش مخالف جهت آنها است

۴- اگر a و b دارای یک نشانه باشند ثابت کنید که این نامساوی همواره محقق است

$$(1+a)(1+b) \geq 1+a+b$$

۵- ناهمچندی زیر را حل کنید :

$$3 - \frac{2x}{3} + \frac{7}{2} > 4 - 3x + \frac{x}{6}$$

$$\frac{x-3}{4} + \frac{2x-5}{6} > 2-x$$

$$\frac{3x}{7} - 1 - 2(x-3) > 5 - 2\left[3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$(x-1)(x+2) > (x-3)(x+5)$$

$$(x+1)(x-2)(x-3) > x^2(x-6) - x(1-2x)$$

۶- ناهمچندی های حرفی زیر را حل کنید :

$$ax + c > bx + d \qquad ax - a > bx - b$$

$$5ax + a - b > 2x - 3a(x-a) + b$$

$$\frac{ax+b}{a-b} - 1 > \frac{ax-b}{a+b} + 1$$

۷- مقدارهائی برای x بدست آورید که جواب این دو نامساوی باشند :

$$\begin{cases} 3x + \frac{5}{21} > 2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{7} \\ 4x + \frac{3}{2} > 2x - \frac{x}{3} \end{cases}$$

وهمچنین برای دو نامساوی

$$\frac{1}{3} - 2x > 2x - 5 > 3x + 1$$

$$\begin{cases} 8x - 5 + \frac{2x-1}{3} > \frac{5x}{2} - 4 \\ 2x - \frac{3x-2}{3} > \frac{5x}{2} - \frac{7}{6} \end{cases}$$

ب- بحث همچندیهای حرفی

۴۵- مثال ۱- برای حل همچندی حرفی $mx = 3$ باید دو طرف را بر m تقسیم نمود بشرط اینکه m مخالف صفر باشد: $x = \frac{3}{m}$ جواب همچندیست که اگر به m مقدارهای مختلف دهیم برای x نیز مقدارهای مختلف بدست میآید مثلاً بازاء $m = 1$ مقدار x مساوی ۳ است وبازاء $m = \frac{1}{2}$ مقدار x مساوی ۶ است ولی اگر m مساوی صفر اختیار شود همچندی ما غلط است وجوابی برای x نمیتوان یافت زیرا حاصل ضرب هر عدد در صفر مساوی صفر میشود نه مساوی ۳

تبصره - چنانکه سابقاً گفتیم (کتاب اوّل شمارهٔ ۵۳) اگر m از حیث قدر مطلق خیلی کوچک و نزدیک صفر اختیار شود قدر مطلق $\frac{3}{m}$ بسیار بزرگ میشود و آنرا بانشانهٔ ∞ نمایش میدهند و گویند که قدر مطلق x بینهایت بزرگست.

مثال ۲- جواب همچندی $mx = 0$ صفراست هرچه باشد مقدار m امّا اگر m را بخصوص مساوی صفر بگیریم دراینصورت هر عددی میتواند جواب همچندی باشد یعنی در تساوی $0 \times x = 0$ میتوان بجای x هر عدد را قرارداد.

تبصره - اگر دراینحالت که m صفراست مطابق قاعدهٔ کلّی همچندی $mx = 0$ را حلّ کنیم یعنی دو طرف را بر ضریب x تقسیم کنیم خواهیم داشت $x = \frac{0}{0}$ وچون در همچندی بالا هر جوابی صدق میکند بنابراین گوئیم مقدار $\frac{0}{0}$ مبهم است یعنی ممکن است مساوی مقدارهای مختلف باشد.

۴۶- بحث همچندی حرفی $ax = b$. در مثال اول معلوم شد که همچندی $mx = 2$ دارای جواب است مگر وقتیکه m مساوی صفر اختیار شود که دراینحالت همچندی ناشدنی (ممتنع) است و در مثال دوّم اگر m را صفر بگیریم همچندی جوابهای بیشمار دارد و درغیر اینحالت یک جواب معیّن دارد ازینرو میتوان بحث همچندی را بدین ترتیب تعریف کرد:

تعریف - بحث در «وجود» ریشه های همچندی حرفی عبارتست ازانیکه مقدارهای مختلف حرف یا حروف معلوم را از نظر گذرانده به بینیم بازاء چه مقدارهائی از حرفهای معلوم همچندی دارای جوابست و بازاء چه مقدارهائی از حرفهای معلوم همچندی نشدنی و یا جواب مبهم است

راه عملی برای بحث همچندی های حرفی درجهٔ اوّل اینست که اوّل همچندی حرفی را بصورت کلّی $ax = b$ درآورده و معلوم کنیم بازاء چه مقدار (یا مقدارهائی) از حرفهای معلوم یکی از دو ضریب a و b و یا هردو صفر میشوند و خلاصهٔ بحث چنین است:

اگر $a \neq 0$ باشد دراینصورت همچندی $ax = b$ همیشه دارای جواب معیّن $x = \frac{b}{a}$ است بخصوص اگر $b = 0$ باشد این جواب صفراست اگر $a = 0$ باشد دو حالت اتفاق می افتد: اگر $b \neq 0$ باشد همچندی ناشدنیست و جواب ندارد و اگر b هم صفر باشد جواب همچندی بیشمار و بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ است

ومیتوان این جدول سادهٔ زیر را تشکیل داد.

بحث همچندی $ax = b$

اگر $a \neq 0$ باشد همچندی دارای یک جواب معیّن $x = \frac{b}{a}$ است

اگر $a = 0$ باشد
- اگر $b \neq 0$ باشد همچندی ناشدنیست و جواب ندارد
- و $b = 0$ باشد جواب همچندی مبهم است

مثال ـ مطلوبست بحث همچندی

$$(m^2-1)x = m(m-1)$$

پس از تجزیه کردن ضریب x نتیجه میشود

$$(m-1)(m+1)x = m(m-1)$$

درینجا ریشه های a (یعنی ضریب x) اینست $m=1$; $m=-1$
و ریشه های b $m=0$; $m=1$ میباشد بنابراین بحث این همچندی چنین میشود:

چون بازاء $m = \pm 1$ ضریب x صفر میشود بنابراین بغیر ازین دو مقدار هر مقداری به m داده شود همچندی دارای یک جواب معیّن $x = \frac{m}{m+1}$ است (پس از ساده کردن) بخصوص این جواب صفر است اگر $m = 0$ باشد اگر $m = -1$ باشد تنها ضریب x صفر میشود و جملهٔ معلوم مساوی ۲ میگردد پس در ازاء $m = -1$ همچندی ناشدنی است

و اگر $m = +1$ باشد هم ضریب x و هم طرف معلوم هر دو صفر میشوند

بنابراین بازاء $m = 1$ جواب همچندی مبهم است

خلاصهٔ این بحث را میتوان بطور ساده چنین نوشت

اگر $m \neq \pm 1$ اختیار شود همچندی دارای ریشهٔ معیّن $x = \frac{m}{m+1}$ است

« $m = -1$ « همچندی ناشدنیست

« $m = +1$ « جواب همچندی مبهم است

تمرین

مطلوبست حل و بحث همچندهای زیر:

$(a-1)x = b - x$ و $a(x-c) = c$

$a(x-1) - 1 = x - a$ $ax - b = x - 1$

$(a-b)x - 1 = 1 - (b-1)x$

$(a+b)x + (a-b)x - ax = b - 1$

$(x-a)(x-b) = x^2 - a^2$ و $(a-x)(b-x) = x^2$

$(ax-b)(m-1) + b(m-1) = a(m-1)$

$m(a+b-x) = n(a+b-x)$

$\frac{x-a}{a} + b = x - 1$

$\frac{ax}{b} - \frac{b}{a}(x-b) = a$ $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 1$

$$\frac{a-bx}{b}=\frac{ax-b}{a} \quad , \quad a\left(m-\frac{x}{n}\right)=b\left(n-\frac{x}{m}\right)$$

$$\frac{2x-a}{b}-\frac{b-2x}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$\frac{a}{b}(a-x)+a(b-x)+\frac{1-ax}{a}+\frac{ab-x}{b}=\frac{a^2}{b}$$

$$\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$$

$$\left[(a^2-b^2)x-1\right]^2+(2abx-1)^2=\left[(a^2+b^2)x+1\right]^2$$

$$\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$$

$$\frac{ax+b}{ax-b}-\frac{bx}{ax+b}=\frac{ax}{ax-b}-\frac{(ax^2-2b)b}{a^2x^2-b^2}$$

$$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}=\frac{a(x-b^2)+b(a^2-x)}{a(x-b^2)-b(a^2-x)}$$

$$\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$$

$$\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{a+c}+\frac{c(x-c)}{a+b}=x$$

$$\frac{\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-b}{x+b}}{1-\dfrac{x+a}{x+b}}=4$$

$$\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{x+2ab}{a+b-c}+\frac{x-2ab}{a-b+c}=\frac{x+2ab}{a+b+c}+\frac{2ab-x}{b+c-a}$$

$$\frac{x-2a}{b+c-a}+\frac{x-2b}{a+c-b}+\frac{x-2c}{a+b-c}=\frac{3x}{a+b+c}$$

فصل سوّم

الف - حلّ مسئله های یک مجهولی درجهٔ اوّل

۴۸ - هر مسئله دارای معلوم یا معلومهائیست که از روی آنها باید مجهول یا مجهولها را بدست آورد.

مثلاً: (مزد روزانهٔ کارگری ۷ ریال است پس از ۱۵ روز مزد او چند ریال میشود؟) مسئله ایست که معلومهای آن مزد روزانه و مدت کار و مجهولش مزد این مدت است

همچنین درین مسئله: دو زاویهٔ مثلثی °۷۵ و °۴۵ است زاویهٔ سوم را حساب کنید - معلومهای این مسئله دو زاویهٔ مثلث و مجموع سه زاویهٔ مثلث است (این نکته در مسئله گفته نشده و ما خود میدانیم) و مجهول آن مقدار زاویهٔ سوم است

۴۹ - حلّ کردن یک مسئله - حلّ کردن یک مسئله بدست آوردن مجهول یا مجهولهای آن مسئله است از روی معلومها

چنانکه میدانیم هرگاه بخواهیم یک مسئله را از راه حساب حل کنیم برای بدست آوردن مجهول عملهائی بر روی معلومها انجام میدهیم تا در نتیجهٔ این عملها مجهول بدست آید بدون اینکه خود مجهول (یا مجهولها) درین عملها دخالت

داده شود . ولی در جبر بعکس از اوّل مجهول را در عملها دخالت میدهیم بدین ترتیب که آنرا بحرفی نموده و مانند معلوم در نظر میگیریم و بر روی آن و معلومها عملهائی را که در مسئله گفته شده انجام میدهیم مانند مسئله های زیر :

مسئلهٔ ۱ - $\frac{9}{100}$ پولی به بینوایان داده شده و ۱۸۲۰ ریال از آن پول مانده تمام پول چقدر است ؟

معلومهای این مسئله $\frac{9}{100}$ و ۱۸۲۰ است و مجهول آن تمام پول است

حل - تمام پول را که نمیدانیم چند است x ریال میگیریم بنابراین مبلغی که بین بینوایان تقسیم شده است $\frac{9x}{100}$ ریال بوده و آنچه مانده است $(x - \frac{9x}{100})$ ریال میباشد بنا بفرض مسئله میدانیم که این مانده ۱۸۲۰ ریال است پس خواهیم داشت :

$$x - \frac{9x}{100} = 1820$$

این تساوی را همچندی مسئله نامند و از حل آن x و یا مبلغ پول بدست میاید

$$x = 2000$$ ریال

مسئله ۲ - در سه گوشه ABC پهلوی $BC = a = 15$ متر و ارتفاع AH دارد بر آن بدرازای ۹ متر است بچه فاصله از تارک (رأس) A خطی موازی پهلوی a رسم کنیم تا تکه ای از آن که درون سه گوشه است بدرازای ۵ متر باشد .

معلومهای مسئله ۱۵ و ۹ و ۵ و خاصیتی است که از خط موازی یک پهلو در سه گوشه پیدا میشود

مجهول - فاصلهٔ این خط موازی از تارک A است .

حل - مجهول یعنی فاصلهٔ آن تکه خط از تارک A را که نمیدانیم به x متر مینمائیم از رسم این تکه خط موازی سه گوشهٔ دیگری پیدا میشود شبیه سه گوشهٔ اوّل که قاعده اش پنج متر و ارتفاعش x متر است .

در این مسئله علاوه بر معلومهائیکه داده شده تشابه این دو سه گوشه را نیز باید در نظر گرفت که بدون رعایت آن مسئله حل نمیشود از روی همین تشابه خواهیم داشت

$$\frac{5}{15} = \frac{x}{9}$$

که همچندی مسئله است و از حلّ آن x یا فاصله بدست میآید :

$$x = 3$$

پرسش های شفاهی

۱ - قیمت یک جلد کتاب $5a$ ریال است بهای n جلد از همان کتاب چند ریال است .

۲ - قیمت ۵ جلد کتاب a ریال است بهای n جلد از همان کتاب چند ریال میشود .

۳ - پهنه راست گوشه ای ab متر مربع است و درازای آن a متر است پهنا و پیرامون آن چند متر است .

۴- دو ترن در یک آن از ایستگاهی به دو سوی مختلف حرکت کردند تندی آنها بترتیب ۴۵ کیلومتر و ۶۰ کیلومتر در ساعت است پس از سه ساعت بدو شهر A و B رسیدند تعیین کنید فاصلهٔ آن دو شهر را از آن ایستگاه و از یکدیگر.

۵- دو ترن ه و چ از دو ایستگاه A و B در یک آن بطرف هم میآیند تندی آنها بترتیب ۵۰ کیلومتر و ۴۰ کیلومتر در ساعت است پس از مدّت سه ساعت هر دو به دوراهی میرسند فاصلهٔ دو ایستگاه A و B را حساب کنید درصورتیکه درازی دوراهی ۲۰۰ متر باشد

۶- اگر شخصی اکنون x سال داشته باشد x-۱۵ چه معنائی میدهد؟ و همچنین معنای این همچندی چیست؟

$$x + ۲ = ۲ (x - ۱۵)$$

۷- شخصی در ط دقیقه ه متر راه میرود معلوم کنید مقدار راهی را که در ح ساعت خواهد رفت و همچنین زمانیکه لازم است برای پیمودن ل متر راه.

۸- پیاده و دوچرخه سواری در یک آن بر روی راه راستی در یک جهت حرکت میکنند پس از مدّت ۱۵ دقیقه دوچرخه سوار ۵ کیلومتر از پیاده جلو افتاده است اگر تندی پیاده در هر دقیقه ۱۰۰ متر باشد تندی دوچرخه سوار در هر دقیقه چند متر است؟

۹- در مسئلهٔ پیش اگر تندی پیاده را ه کیلومتر در ساعت بگیریم تندی دوچرخه سوار

چقدر میشود؟

۱۰- دوچرخه سوار و پیاده ای از دو نقطهٔ A و B بفاصلهٔ AB = ۲۱ کیلومتر در یک آن بطرف هم حرکت می‌کنند پس از مدّت ۳۵ دقیقه بهم میرسند میدانیم تندی دوچرخه سوار ه کیلومتر در ساعت است تندی پیاده را حساب کنید.

۱۱- قاعدهٔ سه گوشه ای ۱۶ متر و بلندیش ۶ متر است اگر از قاعده ۴ متر کم شود چقدر باید بر بلندی افزوده شود تا پهنه تغییر نکند.

از حلّ مسئله های بالا قاعدهٔ کلّی برای حل مسئله های فکری یک مجهولی بدست میآید:

۵۰- قاعده- اوّل- باید صورت مسئله را با دقّت زیادی خواند و تمام معلوم های مسئله را در نظر گرفت و از تمام معلومهای مسئله برای معیّن کردن مجهول باید استفاده نمود

دوّم- مجهول مسئله را بحرفی مانند x نمایش داده مسئله را حل شده تصوّر کرد و از روی فرض مسئله رابطه ای بین معلومها و مجهول تشکیل داد که آن را همچندی مسئله گویند.

سوّم- همچندی مسئله را باید حل کرد.

هرگاه همچندی مسئله ای از درجهٔ اوّل باشد آن مسئله را نسبت بآن مجهول از درجهٔ اوّل گویند.

تبصرهٔ ۱- گاه ممکن است بعضی مسئله‌ها دارای دو مجهول باشد و با وجود این بتوان از روی یکی از مجهولها و معلومهای مسئله مجهول دیگر را حساب کرد یعنی حل این مسئلهٔ دو مجهولی را بحل مسئلهٔ یک مجهولی تبدیل نمود مانند مسئله های زیر:

مسئلهٔ ۱- زمینی است راست گوشه که درازای آن ۳۵ متر بیش از پهنای آن میباشد بدست آورید درازا و پهنای آن را درصورتیکه پیرامون آن ۳۵۰ متر میباشد.

چنانکه می‌بینیم این مسئله دارای دو مجهول است که درازا و پهنای زمین میباشند ولی میتوانیم این مسئله را مبدل بمسئلهٔ یک مجهولی کنیم ازینقرار:

چون پهنای زمین را به x متر بنامیم درازای آن (مجهول دیگر) بموجب مسئله $(x+۳۵)$ متر خواهد بود و میدانیم که پیرامون راست گوشه مساوی دو برابر مجموع پهنا و درازا است بنابراین خواهیم داشت.

$$۲\left[x+(x+۳۵)\right]=۳۵۰$$

و یا $۲x=۱۴۰$ و از آنجا $x=۷۰$ متر یعنی پهنای راست گوشه ۷۰ متر و درازای آن $۳۵+۷۰=۱۰۵$ متر میشود.

ممکن است بجای اینکه پهنا را مجهول گرفتیم درازا را مجهول اختیار کنیم و از روی آن پهنا را بدست آوریم.

تمرین - همین مسئله را حل کنید وقتیکه درازا مجهول اختیار کنیم.

مسئلهٔ ۲- فاصلهٔ A و B ۲۱ کیلومتر است دوچرخه سواری از نقطهٔ A و پیاده‌ای از نقطهٔ B دریک آن حرکت می کنند اگر بطرف هم آیند پس از ۳۵ دقیقه و اگر هر دو دریکجهت حرکت کنند بطوریکه دوچرخه سوار بدنبال پیاده باشد پس از ۶۳ دقیقه بهم میرسند معلوم کنید تندی هریک را:

ملاحظه میشود که این مسئله دارای دو مجهولست (تندی پیاده و تندی دوچرخه سوار) و میتوانیم آن را بیک مجهول حل کنیم ازینقرار:

چون تندی دوچرخه سوار را دریک دقیقه x کیلومتر فرض کنیم راهیکه در ۳۵ دقیقه پیموده $۳۵x$ کیلومتر خواهد بود بنابراین راهیکه پیاده درینمدت رفته $(۲۱-۳۵x)$ کیلومتر میباشد پس تندی پیاده (مجهول دوم) $\frac{۲۱-۳۵x}{۳۵}$ و یا $(\frac{۳}{۵}-x)$ کیلومتر میشود

حال اگر هریک ۶۳ دقیقه درجهت از A بسمت B راه روند دوچرخه سوار به پیاده میرسد یعنی راهیکه دوچرخه سوار درینمدت می پیماید ۲۱ کیلومتر بیش از راهی است که پیاده درینمدت پیموده ولی راهی که دوچرخه سوار و پیاده در ۶۳ دقیقه پیموده اند بترتیب چنین است $۶۳x$ کیلومتر و $۶۳(\frac{۳}{۵}-x)$ کیلومتر بنابراین این همچندی بدست میآید:

$$۶۳x-۲۱=۶۳\left(\frac{۳}{۵}-x\right)$$

که از حل آن تندی دوچرخه سوار چنین میشود $x = \frac{7}{15}$ کیلومتر در دقیقه و یا ۲۸ کیلومتر در ساعت بنا براین تندی پیاده $\frac{2}{15} = \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{15}\right)$ کیلومتر در دقیقه و یا ۸ کیلومتر در ساعت میشود.

تمرین - در حل این مسئله تندی پیاده را x بگیرید و مسئله را حل کنید.

تبصره ۲ - در حل بعضی مسئله ها میتوان بجای مجهول مسئله مجهول دیگری را بدست آورد و از روی آن مجهول مسئله را حساب کرد ممکن است این کار در بعضی مسئله ها سبب آسان شدن حل مسئله شود.

مثال ۱ - سوار امنیه برای اینکه در موقع معیّنی بمقصد برسد از مرکز بایستی ساعتی ۱۲ کیلومتر حرکت کرد چون ۱۲ کیلومتر راه پیمود مأمور شد یک تن زندانی را بمرکز ببرد و پس از انجام مأموریت برای اینکه در همان موقع معین بمقصد برسد ناچار شد ساعتی ۴ کیلومتر بر تندی خود بیفزاید معلوم کنید فاصله مقصدش را از مرکز.

چون فاصله مطلوب را به x بنامیم در دفعه اول سوار این فاصله را در مدت $\frac{x}{12}$ ساعت و در دفعه دوم در مدت $\frac{x}{16}$ ساعت می پیماید اما تفاوت این دو مدت مساوی مدتی است که سوار ۱۲ کیلومتر رفته و بعد همان راه را برگشته یعنی مساوی $\frac{24}{12} = 2$ ساعت است پس همچندی مسئله چنین است

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{16} = 2$$

که از حل آن x یعنی فاصله مرکز از مقصدش که ۹۶ کیلومتر است معلوم میشود

ممکن است مدتی را که سوار برای رفتن از مرکز بمقصد لازم دارد x بگیریم پس از طرفی فاصله مرکز از مقصد $12x$ کیلومتر و از طرف دیگر $16(x - 2)$ کیلومتر است (زیرا مدت دوم $\frac{24}{12} = 2$ ساعت از مدت اول کمتر است) پس این همچندی بدست میآید

$$12x = 16(x - 2)$$

که از حل آن مدت و در نتیجه فاصله مرکز از مقصد بدست میآید

مدت $x = 8$ ساعت و فاصله $= 12x = 12 \times 8 = 96$ کیلومتر

از این رو می بینیم که راه دوم کمی آسانتر از راه اول است.

مثال ۲ - مسئله ۲ از تبصره ۱ - در این مسئله تندی دوچرخه سوار و تندی پیاده مجهول بود - میتوانیم بجای اینکه مستقیماً این دو مجهول را حساب کنیم راههائی را که پیاده و دوچرخه سوار در ۶۳ دقیقه پیموده اند مجهول گرفته آنها را بدست آوریم و از روی آنها تندیهای (مجهولها) را حساب کنیم

فرض می کنیم راهی که پیاده در مدت ۶۳ دقیقه پیموده x کیلومتر باشد پس راهی که دوچرخه سوار در این مدت رفته $(x + 21)$ کیلومتر میشود و بنا براین تندی هر یک بترتیب چنین است $\frac{x}{63}$ کیلومتر در دقیقه و $\frac{21 + x}{63}$ کیلومتر در دقیقه

پس راهی که در ۳۵ دقیقه پیموده اند بترتیب چنین میشود:

$$\frac{۳۵x}{۶۳} = \frac{۵}{۹}x \text{ کیلومتر} \quad , \quad \frac{۳۵(۲۱+x)}{۶۳} = \frac{۵}{۹}(۲۱+x) \text{ کیلومتر}$$

وچون بنا بفرض مجموع این دو راه ۲۱ کیلومتر است این همچندی بدست میآید

$$\frac{۵x}{۹} + \frac{۵}{۹}(۲۱+x) = ۲۱$$

که از حل آن x بدست میآید $x = ۸٫۴$ کیلومتر

بنابراین تندی پیاده $\frac{۸٫۴}{۶۳} = \frac{۲}{۱۵}$ کیلومتر در دقیقه میشود .

و تندی دوچرخه سوار $\frac{۲۱+۸٫۴}{۶۳} = \frac{۷}{۱۵}$ کیلومتر در دقیقه خواهد بود .

چون این دو راه حل را با هم بسنجیم گرچه از حیث عمل هر دو یکسان بنظر میآیند ولی می‌بینیم که از راه دوم همچندی مسئله آسانتر بدست میآید .

تمرین

مسئله های زیر را حل کنید :

۱- مجموع سه عدد تاق متوالی ۲۱ است آن سه عدد کدامند

۲- ۱۵۸ ریال را به سه نفر بخش کنید بطوریکه سهم دومی ۷ ریال بیش از سهم اولی باشد و سومی ۴ ریال بیشتر از دومی بگیرد

۳- با ۱۲۹۰ ریال چند متر ماهوت متری ۱۵۰ ریال و چند متر فاستونی متری ۸۰ ریال میتوان خرید بنابرآنکه ماهوت دو متر بیش از فاستونی مورد لزوم باشد؟

۴- ماهوت متری ۱۵۰ ریال و فاستونی متری ۸۰ ریال است با ۱۱۴۰ ریال

از هر یک چند متر میتوان خرید بنابرآنکه دو برابر ماهوت فاستونی لازم باشد؟

۵- ۲۴۰ ریال را به سه نفر بخش کنید بطوریکه سهم اولی دو برابر دومی و سهم دومی سه برابر سومی باشد .

۶- شخصی خانه و باغی خرید بر روی هم ۱۵۴۸۰۰ ریال معلوم کنید بهای هر یک را در صورتیکه بهای باغ ۵ برابر بهای خانه است

۷- دوچرخه سواری با تندی ساعتی ۱۲ کیلومتر حرکت نمود ۲ ساعت بعد دوچرخه سوار دیگری با تندی ۲۰ کیلومتر بدنبال او رفت پس از چند ساعت باو خواهد رسید؟

۸- پهنهٔ مربعی ۲۵ متر مربع بیش از پهنهٔ مربع دیگر است اگر پهلوی مربع اول یک متر بیش از پهلوی مربع دوم باشد پهنهٔ هر کدام چقدر است؟

۹- مجموع دو عدد ۴۹۳ و تفاضلشان ۳۰ است تعیین کنید آن دو عدد را

۱۰- پدری ۳۰ سال بزرگتر از پسر است پس از ۴ سال سن پدر چهار برابر سن پسر میشود سن هر یک چقدر است؟

۱۱- شخصی ۱۷۰۰ ریال پارچه خرید بعد تمام را متری ۳٫۵ ریال فروخت در این معامله مقداری زیان کرد حساب نمود که اگر تمام پارچه را متری ۵ ریال فروخته بود درعوض تمام باندازهٔ زیان سود میبرد معلوم کنید درازای پارچه را.

۱۲- ساعت فروشی ۸۱ ساعت نقره و ۱۳ ساعت طلا را بر روی هم به ۱۳۳۰۰ ریال

فروخته است درصورتیکه بهای هر ساعت طلا ۴ برابر بهای یکساعت نقره باشد بهای هریک چقدر است ؟

۱۳- گنجایش دو ظرف پر از آب بر روی هم ۱۹۲ لیتر است اگر ۶۰ لیتر از ظرف اولی و ۱۲ لیتر از ظرف دومی برداشته شود مقدار آبی که در هر دو باقی میماند مساویست. گنجایش هریک چقدر است ؟

۱۴- پس انداز دو نفر ۷۲۰۰ ریال و ۱۵۰۰ ریال است هریک سالیانه ۴۵۰ ریال پس انداز میکنند معلوم کنید پس از چند سال پس انداز دومی $\frac{1}{2}$ پس انداز اولی میشود؟

۱۵- دارائی دو نفر بترتیب یکی ۲۲۴۵۰ ریال و دیگری ۸۶۵۰ ریال است اولی سالیانه ۸۶۰ ریال از دارائی خود خرج میکند درصورتیکه دومی هر سال ۵۴۰ ریال اندوخته مینماید معلوم کنید پس از چند سال دارائی هر دو مساوی میشود؟

۱۶- زمینی است بشکل راست گوشه که پهنایش $\frac{3}{5}$ درازایش میباشد چون بر درازا ۱۰ متر و بر پهنا ۵ متر افزوده شود راست گوشه ای حاصل میشود که پهنه اش ۸۷۵ متر مربع بیش از پهنهٔ راست گوشهٔ اولی است تعیین کنید درازا و پهنای راست گوشه را.

۱۷- پدری بطفل خود گفت هر روز نمرهٔ خوب داشته باشی ۰٫۵ ریال بتو میدهم

و هر روز یک نمرهٔ بد داشته باشی باید ۰٫۲ ریال بدهی پس از ۲۱ روز طفل ۷ ریال پول داشت معلوم کنید چند روز نمرهٔ خوب داشته است؟

۱۸- فاصلهٔ دو شهر ۵۱۲ کیلومتر است ماشینی با تندی ۴۰ کیلومتر در ساعت دو ساعت بعد از ظهر از شهر اول بطرف شهر دوم حرکت مینماید ماشین دیگر در موقع ظهر با تندی ساعتی ۳۲ کیلومتر از شهر دوم بشهر اول میرود معلوم کنید پس از چند ساعت از موقع حرکت بهم میرسند؟

۱۹- درازای دو قاعدهٔ ذوزنقه ای ۷۶٫۵ متر و ۱۲۸٫۵ متر و بلندی آن ۳۲ متر است از یک تارک قاعدهٔ کوچکتر خط راستی چنان بکشید تا بقاعدهٔ بزرگتر برسد و ذوزنقه را بدو قسمت هم ارز تقسیم کند.

۲۰- در موقع ظهر عقربه های ساعتی (ساعت شمار و دقیقه شمار) برهم منطبقند پس از چند ساعت دیگر دوباره برهم منطبق میشوند (اولین انطباق)

راهنمائی- تندی عقربهٔ دقیقه شمار ۱۲ برابر تندی عقربهٔ ساعت شمار است بنابراین اگر x ساعت مدت و ضمناً قوسی از دایرهٔ ساعت باشد که عقربهٔ ساعت شمار برای انطباق می پیماید عقربهٔ ثانیه شمار در همین مدت قوسی برابر ۱۲ x می پیماید واضح است که اختلاف این دو مسافت یکدوره محیط و یا ۱۲ است

۲۱- سه ساعت بعد از ظهر است پس از چند ساعت دیگر عقربه ها بر یک امتداد قرار

خواهند گرفت؟

۲۲- عددیست دو پیکری که مجموع پیکرهایش ۱۲ میباشد چون آنرا بعکس ترتیب نویسند عدد حاصل ۳۶ یکه از عدد مطلوب بزرگتر است.

راهنمائی- اگر ه یکان و ح دهٔ عدد دو پیکری باشد آن عدد چنین نوشته میشود ه + ح ۱۰ و عکس ترتیب آن میشود ح + ه ۱۰.

۲۳- مطلوبست تعیین عددی بین ۴۰۰ و ۵۰۰ بطوریکه مجموع پیکرهایش ۹ باشد و چون آنرا بعکس ترتیب نویسند عدد حاصل $\frac{۱۳}{۲۴}$ عدد مفروض شود.

۲۴- تاریخ اختراع چاپ عددی است چهار پیکری که پیکر دهگان نصف یکان و پیکر سده مساوی مجموع پیکرهای دهگان و سدگان است و چون برآن عدد ۴۹۰۵ بیفزایند عددی که حاصل میشود بعکس ترتیب عدد مطلوبست بدست آورید آن عدد را.

۲۵- مبلغ ۵۴۲۵ ریال را بین سه نفر بخش کنید بقسمی که سهم اوّلی مساوی $\frac{۶}{۵}$ سهم دوّمی شود و سهم سوّمی مساوی $\frac{۱۷}{۱۲}$ سهم دوّمی گردد.

۲۶- حاصل جمع دو عدد ۳۲ است و اگر بزرگتر را بر کوچکتر تقسیم کنند بهر ۳ و مانده ۴ است آن دو عدد کدامند؟

۲۷- عدد ۵۱۲ را به دو جزء چنان تقسیم کنید که حاصل جمع بهر هر یک بترتیب بر ۲۵ و ۳۰ برابر ۲۰ شود.

۲۸- چرخهای جلوی درشکه ای در پیمودن راهی ۱۰۰۰ دور بیش از چرخهای عقب چرخیده اند مطلوبست درازای راهی راکه درشکه پیموده بنا بر آنکه قطر چرخ جلو ۰ر۸ متر و قطر چرخ عقب یک متر باشد.

۲۹- در مثلثی بقاعدهٔ ۲۵ = BC متر و بلندی ۱۸ = AH متر مربّعی محاط کنید بطوریکه یکی از پهلوهای مربّع روی قاعدهٔ BC واقع باشد.

۳۰- چه عددی بر برخه نام و برخه شمار $\frac{۲۳}{۴۵}$ افزوده شود تا برخهٔ حاصل برابر $\frac{۲}{۳}$ گردد؟

۳۱- چه مقدار بر برخه نام و برخه شمار برخهٔ $\frac{۴}{۷}$ افزوده شود تا برخهٔ حاصل $\frac{۱}{۱۵}$ از یک کمتر باشد؟

۳۲- برخه ای معادل $\frac{۷}{۸}$ تعیین کنید بطوریکه مجموع برخه نام و برخه شمارش ۱۳۵ باشد.

۳۳- تفاوت قیمت $\frac{۳}{۴}$ یکتوپ پارچه از $\frac{۵}{۶}$ آن ۶۳ ریال است معلوم کنید درازای توپ پارچه را درصورتیکه قیمت هر مترش ۹ ریال باشد.

۳۴- بدهکاری میتواند ۴۳ درصد وام خود را بپردازد اگر ۱۵۰۰ ریال بیشتر میداشت میتوانست $\frac{۳}{۵}$ وامش را ادا کند تعیین کنید دارائی و مبلغ وامش را.

۳۵- شخصی خانه اش را به ۳۸۰۰۰ ریال فروخت باندازهٔ ۵ درصد خرید ضرر کرد معلوم کنید قیمت خانه را.

۳۶- تاجری مقداری پارچه خرید خیال کرد که اگر متری ۱۲۵ ریال بفروشد در تمام پارچه ۴۱۴۰ ریال سود میبرد اتفاقاً متری ۹۷٫۵ ریال بیشتر نفروخت در نتیجه ۹۲۰ ریال در فروش تمام پارچه زیان کرد معلوم کنید طول پارچه را.

۳۷- شخصی از نقطه A باتندی ۱۸ کیلومتر در ساعت شخص دیگر را که از نقطهٔ B باتندی ۱۵ کیلومتر شروع بحرکت نموده دنبال مینماید معلوم کنید در چه فاصله از نقطهٔ B باو میرسد در صورتیکه AB = ۴۲ کیلومتر باشد.

۳۸- دوچرخه سواری برای رسیدن از منزل بمقصدی هر دقیقه ۱۵۰ متر راه می پیماید در موقع برگشتن بواسطه سراشیبی هر دقیقه ۳۶۰ متر طی میکند معلوم کنید دوری مقصدش را از منزل در صورتیکه مدت رفتن و برگشتن بر روی هم یکساعت و ۲۵ دقیقه باشد.

۳۹- دو دوچرخه سوار از یک نقطه در لحظهٔ معین حرکت نمودند تندی اوّلی ۱۷٫۶ کیلومتر در ساعت و تندی دوّمی ۱۳٫۲ کیلومتر در ساعت است پس از سه ساعت راه برای اینکه دومی عقب نماند اوّلی تندی خود را ساعتی ده کیلومتر نمود معلوم کنید پس از چند ساعت دوّمی باوّلی میرسد.

۴۰- شخصی راهی را باتندی ۱۲ کیلومتر در ساعت میرود اگر باتندی ۸ کیلومتر میرفت ۲ ساعت دیرتر بمقصد میرسید معلوم کنید درازای راه را.

۴۱- مطلوبست تعیین درازا و پهنای راست گوشه ای که دورهٔ آن ۳۲۰ متر و متشابه باشد با راست گوشه ایکه درازا و پهنایش ۲۵ متر و ۱۵ متر است.

۴۲- زارعی برای خرید ۱۶۰ گاو و گوسفند ۳۴۸۰۰ ریال داد معلوم کنید قیمت هر گاو و گوسفند را در صورتیکه بدانیم عدهٔ گوسفند سه برابر عدهٔ گاو بود و قیمت ۲۰ گوسفند معادل قیمت ۳ گاو باشد.

۴۳- شخصی مقداری پارچه خرید متری ۵ ریال در موقع فروش ۱/۵ آنرا متری ۵٫۴ ریال و ۱/۴ آنرا متری ۲٫۹ ریال و بقیه را متری ۶ ریال فروخت معلوم کنید درازای پارچه را در صورتیکه بدانیم در فروش تمام پارچه ۱۶۶ ریال سود برده است.

۴۴- فاصلهٔ نقطهٔ B از A ۵۸۸ کیلومتر است ترنی این فاصله را در ۹ ساعت و ۴۰ دقیقه پیموده باین طریق که از نقطهٔ A تا نقطهٔ C (بین A و B) باتندی ۷۰ کیلومتر در ساعت حرکت نموده و از C تا B تندیش ۵۱ کیلومتر در ساعت بوده است معلوم کنید موضع نقطهٔ C را

۴۵- دو کارگر با یکدیگر کار میکنند مزد یک روز کارگر اوّل ۵ ریال بیش از مزد یک روز کارگر دوّم است مطلوبست مزد روزانه هریک در صورتیکه بدانیم مزد

۲۵ روز کارگر اوّل ۶۵ ریال بیش از مزد ۳۰ روز کارگر دوّم است.

۴۶- شخصی کشت زاری را خرید یکدفعه ۸۲۵۰۰ ریال برای هزینهٔ قباله نویسی و برای $\frac{۲}{۵}$ بهای کشت زار پرداخت دفعهٔ دوّم $\frac{۱}{۲}$ باقیمانده را ۱۰۰- ریال کم و دفعهٔ سوّم در موقع تفریغ حساب ۶۱۰۰ ریال را داد معلوم کنید بهای کشت زار و هزینهٔ قباله نویسی را.

۴۷- تنخواهی را میان دو نفر تقسیم کردیم بطوریکه بهرهٔ اوّلی $\frac{۳}{۴}$ بهرهٔ دوّمی و ده یک بهرهٔ اول با $\frac{۲}{۵}$ بهرهٔ دوّم روی هم ۱۰۰ ریال شده است بهرهٔ هر یک چند است؟

۴۸- کالائی ۱۴۰۰ ریال ارزش دارد آن را چند بفروشیم تا ۲ درصد فروش سود ببریم؟

۴۹- شخصی در فروش کالائی ۱۵ درصد خرید سود برد ولی اگر ۵۵ ریال بیشتر میفروخت سودش ۱۴ درصد فروش میبود تعیین کنید سود را

۵۰- شخصی ۵ ساعت بیکاری دارد با درشکه ای که در هر ساعت ۱۲ کیلومتر حرکت میکند بگردش میرود پس از چه مدّت باید از درشکه پیاده شده با تندی ۴ کیلومتر در ساعت برگردد تا در موقع معیّن بکار خود مشغول شود؟

۵۱- حوضی دارای دو راه آبست اوّلی اگر باز باشد حوض پس از ۴ ساعت پر

میشود و اگر راه آب دوّم تنها باز باشد حوض در شش ساعت پر میشود معلوم کنید اگر حوض خالی باشد و هر دو راه آب باز نمایند در چند ساعت پر میشود؟

۵۲- حوضی دو راه آب دارد که چون با هم باز باشند حوض در یکساعت و ۱۲ دقیقه پر میشود ولی راه آب به تنهائی حوض را در سه ساعت پر میکند معلوم کنید راه آب دوم به تنهائی حوض را چند ساعته پر میکند؟

۵۳- شخصی بر سرمایه اش چهار یک آنرا افزود و سال دوّم بر این سرمایهٔ جدید پنج یک آنرا اضافه کرد و سال سوّم بر این سرمایه جدید شش یک آنرا افزود برای سال چهارم ۷۱۴۰۰ ریال سرمایه داشت معلوم کنید سرمایهٔ سال اوّل را.

۵۴- شخصی $\frac{۷}{۱۲}$ (سه دانگ و نیم) زمینی را جریبی ۱۲۵۰ ریال و باقی را جریبی ۱۱۲۵ ریال فروخت ولی اگر تمام را جریبی ۱۱۰۵ ریال میفروخت ۲۲۳۰۰ ریال زیان میکرد معلوم کنید فروش زمین و مساحت آنرا.

۵۵- ظرفی دارای ۱۵ من سرکه بود که هر یک من آن ۳٫۵ ریال میارزید قدری آب در آن ریختیم قیمت مخلوط صدی بیست کم شد معیّن کنید وزن آب را.

۵۶- مواجب سالیانه نوکری ۹۰۰ ریال با یکدست لباس است نوکر پس از ده ماه کار از خدمت معاف شد در این مدّت ۷۲۰ ریال و یکدست لباس گرفته بود معلوم کنید قیمت لباس را.

۵۷ - دارائی دو نفر رویهم ۱۲۰۰ ریال است اگر اولی $\frac{1}{2}$ دارائی خود را و دومی $\frac{3}{4}$ دارائی خودش را خرج نمایند دارائی آن دو برابر میشود - دارائی هریک چنداست ؟

۵۸ - دو اتومبیل از دو نقطهٔ A و B بفاصلهٔ AB = ۱۳۵ کیلومتر اگر در یک لحظه حرکت نموده بطرف هم روند در ۵۴ کیلومتری A بهم میرسند ولی اگر اولی پنج دقیقه پیش از دومی براه افتد نقطه ملاقات در ۵۷ کیلومتری A خواهد بود معین کنید تندی هریک را

۵۹ - دو نفر با هم شرکت کردند سرمایه اولی ۶۰۰۰۰ ریال پیش از سرمایه دومی بود در نتیجه سودش ۲۵۰۰۰ ریال بیش از سود دومی گردید تعیین کنید سرمایه هریک را در صورتیکه سودشان رویهم ۱۰۰۰۰۰ ریال باشد .

۶۰ - سه متحرک از سه نقطهٔ A و B و C واقع بر یک خط در جهت ABC حرکت میکنند تندی آنها بترتیب ۳۵ کیلومتر و ۱۱ کیلومتر و ۲۵ کیلومتر است . متحرک اولی ساعت ۹ صبح و دو متحرک دیگر ساعت ۷ صبح حرکت میکنند معلوم کنید پس از چه مدت متحرک دومی بیک فاصله از دو متحرک دیگر خواهد بود در صورتیکه میدانیم AB = ۶۷ کیلومتر و BC = ۴۲ کیلومتر است .

۶۱ - شخصی $\frac{4}{5}$ دارائی خود را از قرار ۴٪ و باقی را از قرار ۵٪ به بهره کاری (مرابحه) میگذارد رویهم سود سالیانه اش ۲۹۴۰ ریال شده است دارائی او چند بوده ؟

۶۲ - شخصی سرمایه اش را که ۲۴۰۰۰۰ ریال است بدو قسمت نموده یک قسمت را

از قرار ۴٫۵٪ و باقی را از قرار ۶٪ به بهره کاری میگذارد سود سالیانه اش باندازهٔ سود تمام سرمایه از قرار ۵٪ است هریک از دو قسمت سرمایه چند بوده است ؟

۶۳ - سود دو سرمایه که یکی ۵۴۰۰۰۰ ریال و دیگری ۳۲۰۰۰۰ ریال است پس از ۲۱۶ روز رویهم ۲۰۹۷۰ ریال شده است اگر دو نرخ رویهم ۸٪ باشد نرخ هریک چنداست ؟

۶۴ - شخصی سرمایه اش را که ۴۱۸۰۰۰ ریال است بدو قسمت مینماید پاره ای از آنرا از قرار ۳٫۲٪ و پارهٔ دیگر را از قرار ۲٫۷۵٪ بهره کاری مینماید پس از ۳۱۵ روز سود پارهٔ اول ۲۹۵۷٫۵ ریال بیش از سود پارهٔ دوم میشود هر قسمت چنداست ؟

۶۵ - سررسید (موعد) دو برات یکی یکسال و دومی که مبلغ آن ۴۵۰۰۰ ریال بیش از اولی است ۱۸ ماه است اگر نرخ هر دو ۴٫۵٪ باشد و تنزیل آنها رویهم ۴۱۰۸٫۵ ریال شود مبلغ اسمی هریک چنداست ؟ (به تنزیل داخلی و خارجی)

۶۶ - دو برات یکی ۳۶ روزه و دیگری ۵۴ روزه است مبلغ فعلی آنها بترتیب از قرار ۵٪ و ۶٪ یکی است تعیین کنید مبلغ اسمی دو برات را در صورتیکه رویهم ۴۹۶۵۰ ریال باشد (بهر دو تنزیل) .

۶۷ - براتی ۱۲۶ روزه است و مبلغ فعلی آن به تنزیل داخلی ۱۴٫۷ ریال بیش از مبلغ فعلی آن به تنزیل خارجیست اگر نرخ ۵٪ باشد مبلغ اسمی برات چیست ؟

۶۸- چقدر طلا ومس را باهم بیامیزیم تا ۱۲۵۰ گرم شمش بعیار ۰٫۹ بدست آید؟

۶۹- شمشی است از طلا ومس بعیار ۰٫۷۹ وبوزن ۴۵۹ گرم چقدر طلای خالص برآن باید افزود تا عیار مخلوط ۰٫۹ شود؟

۷۰- در ۳۴ کیلوگرم آب ۲۰۰ گرم نمک طعام محلول است درین محلول چقدر آب خالص بریزیم تا آنکه ۲۰ کیلوگرم آن فقط ۸۰ گرم نمک داشته باشد؟

۷۱- درظرفی ۲۷۵ لیتر شیر است که بهای هر لیتر آن ۱٫۵ ریال است چقدر آب درآن بریزیم تا اینکه بهای یک لیتر مخلوط یک ریال شود؟

۷۲- در ۳۰۰ لیتر شیر که لیتری ۱٫۴۵ ریال ارزش دارد چقدر شیر لیتری یکریال بریزیم تا مخلوط لیتری ۱٫۳ ریال ارزش داشته باشد؟

۷۳- ۳۲ کیلوگرم آب دریا یک کیلوگرم نمک دارد چقدر آب بی نمک برآن بیفزائیم تا اینکه ۳۲ کیلوگرم مخلوط ۱۲۰ گرم نمک داشته باشد؟

۷۴- شمشی است از نقره بعیار ۰٫۸۲۵ هرگاه دو کیلوگرم نقرهٔ خالص بآن بیفزائیم عیار آمیزه ۰٫۸۵ میشود وزن شمش چقدر است؟

۷۵- شمشی است از نقره بوزن یک کیلوگرم وبعیار ۰٫۸ چقدر نقره بعیار ۰٫۶۵ باآن بیامیزیم تا عیار آمیزه ۰٫۷۵ شود؟

۷۶- آمیزه ایست از طلا ومس بوزن ۳۵۰ گرم وبعیار ۰٫۹۳ چقدر مس برآن بیفزائیم

تا عیار آمیزه ۰٫۹ شود؟

۷۷- دو آمیزه است یکی بعیار ۰٫۹ که چون بوزنهای مساوی آندو را بیامیزیم عیار آمیزه حاصل ۰٫۸۳۵ شود تعیین کنید عیار آمیزهٔ دوم را.

۷۸- دو شمش از نقره ومس در دست است عیار شمش اول ۰٫۹۶ و وزن نقرهٔ خالصش $\frac{3}{4}$ وزن نقرهٔ خالص شمش دوم است اگر آن دو را بیامیزند وزن آمیزهٔ حاصل ۱۶۰۰ گرم وعیارش ۰٫۶۴ میگردد تعیین کنید وزن هریک از دو شمش و عیار دومی را

۷۹- دو شمش است از نقره اولی بوزن ۵۰۰ گرم که چون ۲۰ گرم نقرهٔ خالص برآن بیفزایند عیارش ۰٫۰۱ بالا میرود شمش دوم عیارش ۰٫۸۵ که چون ۵۰ گرم نقرهٔ خالص از آن بگیرند عیارش ۰٫۰۲ پائین میرود عیار شمش اول و وزن شمش دوم چقدر است؟

۸۰- وزن مخصوص طلا ۱۹ و وزن مخصوص مس ۹ است آمیزه ایست از طلا ومس بوزن ۵ گرم و بوزن مخصوص ۱۵ معلوم کنید این آمیزه از چند گرم طلا و چند گرم مس ساخته شده است؟

۸۱- تاج هیرُن(۱) پادشاه سیراکوز(۲)، ۲۰ لیور(۳) (هر لیور ۵۰۰ گرم) وزن داشت ارشمیدس عالم مشهور معلوم کرد که در آب $1\frac{1}{4}$ لیور از وزنش کاسته میشود و از آن رو وزن طلا و نقرهٔ تاج را بدست آورد. معین کنید این دو وزن را درصورتیکه بدانیم وزن مخصوص طلا ۱۹٫۶ و از نقره ۱۰٫۵ است.

۸۲- $\frac{۵}{۳۷}$ وزن قلع در آب کاسته میشود و $\frac{۲}{۲۳}$ وزن سرب آمیزه ایست از قلع و سرب بوزن ۶۰ کیلوگرم که چون آنرا در آب وزن کنیم ۷ کیلوگرم از وزنش کاسته میشود - از چند گرم قلع و چند گرم سرب آمیخته شده است؟

۸۳- بالنی از A به B که بفاصلهٔ ۵۰ کیلومتر است حرکت نموده پس از رسیدن بنقطهٔ B به A برمیگردد چون جهت وزش باد از A بطرف B است مدت رفتن یکساعت و مدت برگشتن دو ساعت و ۱۵ دقیقه است تعیین کنید تندی بالن در هوای بی حرکت و تندی باد را.

۸۴- دو متحرک از نقطهٔ A بر محیط دائره ای حرکت می کنند اوّلی تمام محیط را در $۲۷\frac{۱}{۲}$ روز و دوّمی در $۳۶۵\frac{۱}{۴}$ روز می پیمایند اگر هر دو در یک لحظه و در یک جهت حرکت کنند تعیین کنید پس از چه مدّت بیکدیگر خواهند رسید؟

۸۵- گلدانیست از نقره بوزن ۷۴۶ گرم که وزن آن در آب ۶۷۱ گرم است تعیین کنید عیار گلدانرا درصورتیکه وزن مخصوص نقره و مس بترتیب ۱۰٫۴۷ و ۸٫۹ باشد

۸۶- $\frac{۳}{۴}$ ظرفی آب شور است که هر لیتر آن ۱۰۸۰ گرم وزن دارد اگر سه لیتر آب خالص در آن بریزند یک لیتر مخلوط ۱۰۷۰ گرم وزن خواهد داشت تعیین کنید گنجایش ظرف را.

۸۷- دوچرخه سواری با تندی v کیلومتر در ساعت میخواهد به شخصی که d کیلومتر از او دور است و با تندی v' کیلومتر در ساعت حرکت میکند برسد پس از چه مدّت بآن شخص خواهد رسید؟

۸۸- پیاده ای از نقطهٔ A و دوچرخه سواری از نقطه B در یک لحظه بطرف هم حرکت میکنند پس از چند ساعت پیاده از دوچرخه سوار و از نقطهٔ A بیک فاصله خواهد بود درصورتیکه تندی پیاده در ساعت ۵ کیلومتر و تندی دوچرخه سوار ۱۵ کیلومتر و فاصلهٔ AB سی و دو کیلومتر باشد.

ب - بحث در مسئله های فکری درجهٔ اوّل

۵۱- چنانکه دیدیم حلّ یک مسئلهٔ فکری درجهٔ اوّل یک مجهولی منجر بحلّ یک همچندی درجهٔ اوّل یک مجهولی میشود که جواب آن همچندی در حالت کلّی جواب مسئله است ولی ممکن است که جواب همچندی موافق با شرطهای مسئله نباشد و درینصورت جواب مسئله نخواهد بود.

۵۲- **تعریف** - بحث در یک مسئلهٔ فکری عبارتست از تحقیق در اینکه جواب یا جوابهائیکه از روی همچندی مسئله بدست میآید آیا جواب مسئله هست یا نه برای روشن شدن اینموضوع و نیز برای اینکه درضمن راه عملی بحث بدست آید بحلّ و بحث مسئله های زیر میپردازیم:

مسئلهٔ ۱- کتابفروشی ۱۲ جلد کتاب جبر و هندسه به ۱۱۵ ریال خرید در صورتیکه بدانیم قیمت یک جلد جبر ۱۲ ریال و یک جلد هندسه ۹ ریال باشد معین کنید از هر کدام چند جلد خریده است؟

حل- چون شمارهٔ کتابهای جبر را x فرض کنیم شمارهٔ کتابهای هندسه $12 - x$ میشود پس همچندی مسئله اینست $12x + 9(12 - x) = 115$ و جواب همچندی

$x = \frac{7}{3}$ است

بحث- چون جواب مسئله شمارهٔ کتابست بنابراین باید عدد درست باشد و حل آن همچندی یعنی $\frac{7}{3}$ نمیتواند جواب مسئله باشد بنابراین مسئله غلط است یعنی با ۱۱۵ ریال و با قیمت هائیکه در مسئله گفته شده نمیتوان ۱۲ جلد کتاب جبر و هندسه خرید.

مسئله ۲- پدری ۵۵ سال دارد و پسرش ۳۱ سال پس از چند سال سن پدر دو برابر سال پسر میشود؟

حل- مدت مجهول را x میگیریم پس از این مدت سال پدر $55 + x$ و سال پسر $31 + x$ خواهد بود و از روی مسئله این همچندی بدست میآید

$$55 + x = 2(31 + x)$$

که جواب آن $x = -7$ است

بحث- از روی صورت مسئله چنین برمیآید که جواب مسئله باید مثبت

باشد و چون برای x مقدار منفی پیدا شده معلوم میشود مسئله باین قسمی که طرح شده است جواب ندارد.

ولی میتوان جواب منفی را اینطور تعبیر نمود که در ۷ سال پیش سال پدر دو برابر سال پسر بوده است

$$55 + x = 55 - 7 = 48$$ = سال پدر

$$31 + x = 31 - 7 = 24$$ = سال پسر

مسئلهٔ ۳- سرکه فروشی دو قسم سرکه دارد که قیمت یک لیتر اولی ۱٫۲۵ ریال و قیمت یک لیتر دومی ۱ ریال است میخواهد از این دو قسم سرکه m لیتر مخلوط بقیمت هر لیتری a ریال تهیه کند. از هر کدام چند لیتر بردارد؟

حل- اگر شمارهٔ لیترهای سرکهٔ قسم اول را x بگیریم شمارهٔ لیترهای سرکهٔ قسم دوم $m - x$ میشود بنابراین همچندی مسئله چنین است

$$1.25x + (m - x) \times 1 = am$$

که جواب آن چنین است

$$x = \frac{m(a-1)}{0.25}$$

و شمارهٔ لیترهای سرکهٔ دوم اینست

$$m - \frac{m(a-1)}{0.25} = \frac{m(1.25-a)}{0.25}$$

بحث- چون جواب مسئله شمارهٔ لیتر است بنابراین باید عددی مثبت باشد پس شمارهٔ لیترهائیکه بدست آوردیم یعنی $\frac{m(a-1)}{0.25}$ و $\frac{m(1.25-a)}{0.25}$

وقتی جواب مسئله اند که عدد مثبتی باشند و چون m مثبت است باید $(a-1)$ و $(1{,}25-a)$ هردو مثبت باشند یعنی $a-1>0$ و $1{,}25-a>0$ را که از اولی $a>1$ واز دومی $1{,}25>a$ را نتیجه میشود که میتوان گفت برای اینکه مسئله دارای جواب باشد باید a درین دو شرط صدق کند $1<a<1{,}25$

درحالت مخصوص ممکن است شمارهٔ لیترهای یکی از دو قسم سرکه صفر باشد درین صورت یا باید $a=1$ ویا باید $a=1{,}25$ باشد ولی واضح است که درین مسئلهٔ این حالت اتفاق نمی افتد.

تبصره - چنانکه در مسئلهٔ بالا دیدیم در مسئله های فکری که در آنها معلومها بحرف نموده شده عموماً بحث منجرّ میشود بتعیین شرطهائی بین معلومها برای اینکه مسئله دارای جواب باشد.

۵۳ - تعریف: هرگاه برروی محور $x'x$ بمبدء O نقطه ای مانند A داشته باشیم وفرض کنیم متحرکی از نقطهٔ O به نقطهٔ A رود مقدار جبری راهیکه پیمودهٔ آبسیس (۱) نقطهٔ A گویند وآنرا چنین نویسند $\overline{OA}$

واضح است که اگر آبسیس نقطه ای معلوم باشد موضع آن نقطه برروی محور کاملاً معلوم است

(زیرا از روی قدر مطلق آبسیس فاصلهٔ آن نقطه از مبدء واز روی نشانه جهت از O بآن نقطه معلوم میشود) وبعکس

تبصره - بطور کلّی مقدار جبری راهیکه در روی محور $x'x$ از نقطه ای مانند A تا نقطه ای مانند B پیموده میشود به $\overline{AB}$ مینمائیم و واضح است که $\overline{AB}=-\overline{BA}$ ویا

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0$$

مسئله - اگر آبسیس دو نقطهٔ A و B بترتیب a و b باشد معلوم کنید مقدار جبری قطعه خطّ AB را (یعنی مقدار جبری راهیکه باید از A تا B پیموده شود)

اوّلاً - اگر a و b هردو مثبت باشند بفرض $a<b$ شکل زیر حاصل میشود

که از روی آن این تساوی بدست میآید $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$

ویا $a+\overline{AB}=b$ که از آن نتیجه میشود $\overline{AB}=b-a$ (۱)

وبفرض $b<a$ این شکل را خواهیم داشت

که از آن این تساوی بدست میآید $\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}$

ویا $b+\overline{BA}=a$ وچون $\overline{BA}=-\overline{AB}$ است پس خواهیم داشت

$b-\overline{AB}=a$ که از آن نتیجه میشود $\overline{AB}=b-a$ یعنی درینحالت

هم همان تساوی (۱) برقرار است

ثانیاً- اگر a و b هر دو منفی باشند باز مانند بالا ثابت خواهد شد که

$$\overline{AB} = b - a$$

ثالثاً- اگر a و b دارای یک نشانه نباشند مثلاً $a > 0$ و $b < 0$ باشد

مثل این شکل

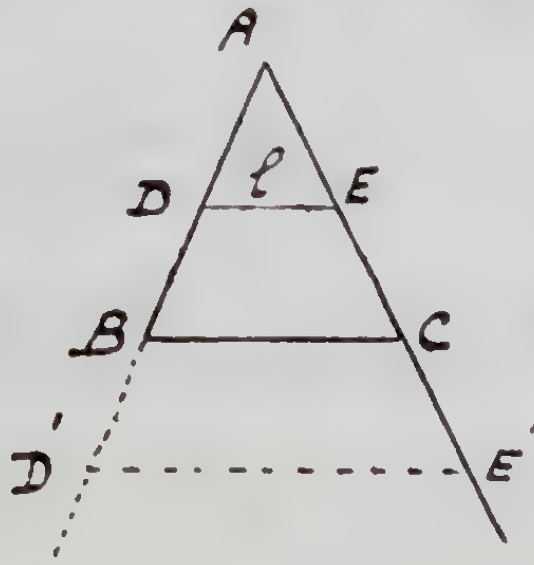
خواهیم داشت $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$ وچون $\overline{AO} = -\overline{OA}$ است

پس $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ ویا $\overline{AB} = b - a$ که همان تساوی (۱) است

پس این تساوی همیشه برقرار است یعنی $AB = b - a$

۵۴- مقدار جبری قطعه خط AB که بر محوری واقع است مساویست با آبسیس انتها (نقطهٔ B) منهای آبسیس مبدء (نقطهٔ A)

مسئلهٔ ۴- مثلث ABC داده شده است بر ضلع AB نقطه‌ای مانند D پیدا کنید که چون از آن نقطه خطی بموازات BC رسم شود نقطه تقاطعش را با AC به E بنامیم قطعهٔ DE بدرازای معلوم b باشد



حل- برای پیدا کردن نقطه D قطعه خط BD را مجهول میگیریم.

برای حل مسئله از راه جبر محوری منطبق بر AB بمبدء B اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم جهت مثبت این محور از B به A باشد. حال مقدار جبری BD را به x مینمائیم از تشابه دو مثلث ADE و ABC نتیجه میشود:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$ (باید متوجه بود که دو طرف تساوی باید هم نشانه باشند)

ویا $$\frac{c-x}{c} = \frac{b}{a}$$ (بموجب ۵۴) که از حل آن مقدار جبری BD بدست میآید:

$$x = \frac{c(a-b)}{a} = c\left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

بحث- اگر $b < a$ باشد $x = \overline{BD}$ مثبت است و کوچکتر از c یعنی نقطه D بین B و A خواهد بود.

اگر $b > a$ باشد x منفی میشود درینحالت نقطهٔ D در نقطه‌ای مانند D' خواهد بود یعنی DE در خارج مثلث میافتد.

درحالت مخصوص $a = b$ مقدار x صفر و نقطه D بر B منطبق میشود

از روی شکل نیز نتیجهٔ این بحث را میتوان تحقیق نمود.

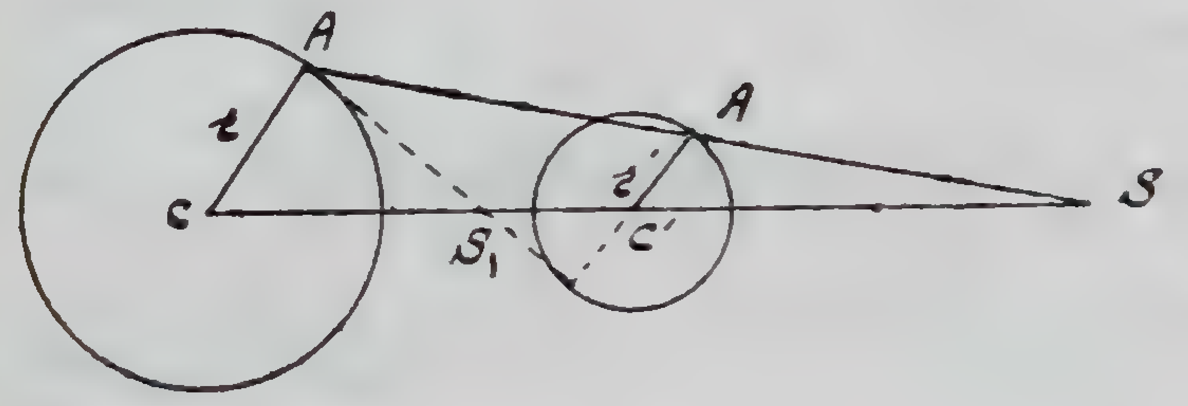
تمرین ۱- همین مسئله را حل کنید وقتی که جهت منفی از B به A باشد.

تمرین ۲- حل کنید همین مسئله را وقتیکه مجهول $\overline{AD}$ باشد

۵۵- تبصره- برای حل کردن مسئله های هندسی از راه جبر وقتی که مجهول بتواند دارای دو سو باشد بهتر آنستکه مانند مسئلهٔ بالا محور و مبدء‌ای اختیار کنیم تا اینکه بحث

آسان شود

مسئلهٔ ۵- در دو دائرهٔ c و c' که شعاع هر یک بترتیب ر و $\text{ر}'$ میباشد چون انتهای دو شعاع موازی را بیکدیگر وصل کنیم خط cc' را در نقطه ای مانند S قطع میکند موضع این نقطه را بیابید. برای پیدا کردن این نقطه cS را مجهول میگیریم چون این مجهول میتواند دارای دو سو باشد بنابراین محوری بر cc' بمبدء c اختیار میکنیم و فرض میکنیم که جهت مثبت آن از c به c' باشد حال اگر $\overline{cS}$ را مساوی x بگیریم از تشابه دو سه گوشهٔ SAC و $SA'C'$ خواهیم داشت (بفرض $cc' = d$):



$$\frac{x}{x-d} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad \text{(۵۴) ویا} \quad \frac{\overline{cS}}{\overline{c'S}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

وازآنجا

$$x = d\,\frac{\overline{AC}}{\overline{AC} - \overline{A'C'}}$$

حالت اول $\overline{AC}$ و $\overline{A'C'}$ دارای دو سوی مختلف میباشند- اگر $\overline{AC}$ را $+\text{ر}$ (یا $-\text{ر}$) بگیریم $\overline{A'C'}$ مساوی $-\text{ر}'$ (یا $+\text{ر}'$) خواهد شد پس

$$x = d\,\frac{\text{ر}}{\text{ر} + \text{ر}'}$$

بحث- درینحالت $x = \overline{cS}$ همیشه مثبت و از d کوچکتر است یعنی نقطهٔ

S بین c و c' قرار میگیرد (مانند نقطهٔ S_1 در شکل)

حالت دوم $\overline{AC}$ و $\overline{A'C'}$ دارای یک جهت میباشند- درینصورت

$$x = d\,\frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{ر}'}$$

بحث- اگر $\text{ر}' < \text{ر}$ باشد x مثبت و از d بزرگتر است بنابراین نقطهٔ S درآنطرف c' میافتد

واگر $\text{ر}' > \text{ر}$ باشد x منفی میشود یعنی نقطهٔ S درآنطرف c قرار میگیرد. یعنی همیشه مرکز دایرهٔ کوچکتر واقع میشود بین مرکز دایرهٔ بزرگتر و S (یعنی نقطه ای که امتداد خط واصل بین انتهای دو شعاع موازی هم جهت خط دو مرکز را قطع میکند)

حالت سوم یا حالت مخصوص وقتیکه $\text{ر} = \text{ر}'$ باشد- درینصورت

$x = d\,\frac{\text{ر}}{0}$ یعنی مسئله جواب ندارد

درینحالت دو دایره مساویند و خطی که انتهای دو شعاع موازی هم جهت را وصل میکند موازی خط cc' میشود و پیداست نقطهٔ تلاقی ندارد

هرگاه فرض کنیم در حالت $x = d\,\frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{ر}'}$ شعاع کوچکتر بتدریج بزرگ شود درینصورت $\text{ر} - \text{ر}'$ بتدریج کوچک شده بسمت صفر میل میکند ولذا قدر مطلق x رفته رفته بزرگ میشود یعنی نقطهٔ S از c دور میشود بطوریکه وقتی $\text{ر}'$ مساوی ر شود این نقطه در فاصلهٔ بینهایت دور از نقطهٔ c واقع میشود درینحالت است که دو

خط موازی شده و گوئیم که نقطهٔ تلاقی آنها در بینهایت دور واقع است.

تمرین

۱- متحرکی بر محور $x'x$ از مبدء O با تندی v متر در ثانیه حرکت میکند پس از a ثانیه با تندی v' راه میرود معلوم کنید پس از چند ثانیه بفاصلهٔ d از نقطهٔ O واقع میشود؟

۲- دوچرخه سواری با تندی v کیلومتر در ساعت میخواهد بمتحرکی که d کیلومتر از او دور است و با تندی v' کیلومتر در ساعت حرکت میکند برسد پس از چه مدت باو خواهد رسید؟

۳- برخط راستی سه نقطهٔ O و A و B واقعست $\overline{OA}=a$ و $\overline{OB}=b$ براین خط نقطه‌ای مانند M پیدا کنید بطوریکه فاصله‌اش از نقطهٔ A میانهٔ هندسی باشد بین دو فاصله‌اش از نقطه‌های O و B

راهنمائی - براین خط محوری بمبدء O اختیار نموده فاصلهٔ مجهول OM را مساوی x میگیریم.

۴- در سه گوشه‌ای که قاعده‌اش بدرازای a متر و ارتفاع وارد براین قاعده بدرازای h متر است راست گوشه‌ای محاط کنید که پیرامونش $2p$ متر باشد.

۵- در سه گوشهٔ مسئلهٔ پیش راست گوشه‌ای محاط کنید که تفاضل دو پهلویش d متر باشد.

۶- از ذوزنقه‌ای دو قاعده و ارتفاع معلوم است بدست آورید فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع دو ساق را از هر قاعده.

۷- ضلعهای سه گوشه‌ای بدرازای a و b و c است نقطه‌ای بر پهلوی a طوری پیدا کنید که چون از آن نقطه دو خط بموازات دو ضلع دیگر رسم کنیم مجموع دو قطعه این دو خط واقع در درون سه گوشه بدرازای معلوم l باشد.

۸- A و B و C سه نقطه از یک خطند ثابت کنید که اگر روی آن خط بدلخواه یک نقطه O بگیریم خواهیم داشت:

$$\overline{OA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{OB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{OC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}=0$$

۹- دو نقطهٔ A و B دریکطرف خط راست RR' و بفاصله‌های a و b از آن واقعست برخط RR' نقطه‌ای مانند C طوری پیدا کنید که پهنهٔ سه گوشهٔ ABC مساوی $\frac{1}{2}k^2$ شود.

راهنمائی - برخط RR' محوری اختیار نموده موقع عمود نقطهٔ A را مبدء آن میگیریم فاصلهٔ نقطهٔ C را از این مبدء که مجهولست x فرض میکنیم و فاصلهٔ دو عمود A و B را l میگیریم

فصل چهارم

الف - حلّ دستگاههای چند همچندی چند مجهولی درجهٔ اول

۵۶ - ممکن است بعضی مسئله های فکری درجهٔ اول بیش از یک مجهول داشته باشند. برای حل آنها از راه جبر چون موافق قاعدهٔ (۵۰) عمل کنیم عموماً بیک یا چند همچندی درجهٔ اول میرسیم که بیش از یک مجهول دارند مانند مسئله های زیر:

مسئله ۱ - قیمت ۵ متر ماهوت و سه متر فاستونی بر روی هم ۱۲۶۰ ریال است معلوم کنید قیمت یکمتر هر کدام را.

چون قیمت یک متر ماهوت را x ریال و قیمت یکمتر فاستونی را y ریال فرض کنیم از روی فرض مسئله این همچندی بدست میآید

$$۵x + ۳y = ۱۲۶۰ \qquad (۱)$$

که یک همچندی دو مجهولیست

اگر فرض کنیم قیمت یک متر ماهوت ۱۸۰ ریال باشد یعنی $x = ۱۸۰$ همچندی دو مجهولی (۱) تبدیل بیک همچندی یک مجهولی $۱۲۶۰ = ۹۰۰ + ۳y$ ویا $y = \frac{۱۲۶۰-۹۰۰}{۳}$ میشود که y یعنی قیمت یکمتر فاستونی چنین است

$y = ۱۲۰$ ریال یعنی بازاء $x = ۱۸۰$ ریال

$y = ۱۲۰$ ریال است این دو عدد را جواب همچندی (۱) گویند

همچنین اگر قیمت یکمتر ماهوت را ۱۵۰ ریال بگیریم یعنی $x = ۱۵۰$ ریال همچندی (۱) تبدیل بیک همچندی یک مجهولی $۱۲۶۰ = ۳y + ۷۵۰$ ویا $y = \frac{۱۲۶۰-۷۵۰}{۳}$ میشود که در اینصورت قیمت یکمتر فاستونی چنین است

$y = ۱۷۰$ ریال یعنی بازاء $x = ۱۵۰$ ریال $y = ۱۷۰$ ریال

این دو عدد نیز یک جواب برای همچندی (۱) میباشند

بهمین طریق بازاء هر مقداریکه به x بدهیم برای y مقداری پیدا میشود و این دو مقدار یک جواب همچندی (۱) است و چون x اختیاریست یعنی میتوانیم بجای آن هر عددی که بخواهیم بگذاریم بنابراین همچندی (۱) دارای جوابهای بیشمار است ممکن است در همچندی (۱) y یعنی قیمت یکمتر فاستونی را معلوم بگیریم در اینصورت مقدار x یعنی قیمت یک متر ماهوت بدست میآید.

از مسئلهٔ بالا معلوم میشود که: هر همچندی دو مجهولی درجهٔ اول جوابهای بیشمار دارد و این بمعنا است که اگر بیکی از دو مجهول همچندی مقداری اختیاری بدهیم مجهول دیگر از روی آن معلوم میشود

۵۷ - قاعده - برای حلّ همچندی دو مجهولی $ax + by = c$ (که در آن a و b مخالف صفرند) چون x را معلوم فرض کنیم y از روی آن

بدست میآید $y = \frac{c - ax}{b}$ واضح است که در مقابل هر مقداری از x مقداری برای y پیدا میشود.

واگر y را معلوم بگیریم x از روی آن حساب میشود $x = \frac{c - by}{a}$ یعنی نظیر هر مقداری از y مقداری برای x پیدا میشود.

تمرین های شفاهی

۱- همچندیهای زیر را حل کنید وقتیکه به x مرتباً عددهای ۱ و ۱- و $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۳}{۴}$ داده شود.

$x = ۴y + ۵$ و $۳x - ۲y = ۷$

$۵x = ۲y - ۱۱$ و $۲x - ۳y + ۱ = ۰$

$۱۲x - ۳y - ۵ = ۰$ و $۲y = ۷x - ۱$

۲- در مسئلهٔ بالا عددها را به y بدهید و همچندیها را حل کنید.

۳- در همچندیهای زیر معین کنید عددهائیکه جلوی هر همچندی نوشته شده جواب آن همچندی هست یا نیست (عدد اول بجای x و عدد دوم بجای y)

۱ ، ۰	۰ ، ۱٫۵-	۱- ، ۵	۷ ، ۶	$۳x - ۲y = ۳$
۰ ، ۰	۱۶- ، ۳	۴ ، ۱-	۱- ، ۱-	$x + ۵y = -۱$
۱- ، ۰	۲٫۵ ، ۵	۲ ، ۱-	۲ ، ۱	$۲x - ۵ = y$

۴- در هر یک از همچندیهای زیر دو عدد پیدا کنید که جواب آن همچندی باشد و دو عدد بنویسید که جواب نباشد.

$۳x - ۲y = ۰$ $\qquad$ $۲x - y = ۱$

$۵x + ۲y = ۷$ $\qquad$ $y - ۲ = ۲x$

۵۸- بطور کلی هر همچندی که بیش از یک مجهول داشته باشد دارای جوابهای بیشمار است

مثلاً یک همچندی سه مجهولی $ax + by + cz = d$ (بفرض $abc \neq ۰$) دارای جوابهای زیاد است و قاعدهٔ حل آن اینست که بجای دو مجهول آن عددهائی اختیاری گذارده و مجهول سوم را از روی آنها حساب کنیم

تمرین شفاهی

۱- اگر بجای x عدد ۱- و بجای y عدد ۲ بگذاریم z را در هر یک از همچندیهای زیر پیدا کنید:

$۲x - ۳z + ۵ = y$ $\qquad$ $x + y - z = ۲$

$y + ۲z - ۳ = x$ $\qquad$ $۳x - ۲z = y - ۱۱$

۲- در همین همچندیها این عددها را امتحان کنید $\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱۵ \\ -۲ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۱۱ \\ ۰ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} -۱ \\ -۱ \\ ۱٫۵ \end{vmatrix}$ که جواب هستند یا نه (اولی بجای x و دومی بجای y سومی بجای z)

۵۹- تبصره - دیدیم که هر همچندی دو مجهولی جوابهای بیشمار دارد ولی اگر این همچندی دو مجهولی همچندی یک مسئله فکری باشد ممکن است همه این جوابها در مسئله صدق نکند چنانکه در مسئلهٔ (۱) (قیمت پنج متر ماهوت و سه متر فاستونی بر رویهم ۱۲۶۰ ریال است معلوم کنید قیمت یکمتر هر کدام را)

اولاً بطور کلی قیمت ماهوت یعنی x بیشتر از قیمت فاستونی یعنی y میباشد

و ثانیاً امروز قیمت فاستونی از متری ۵۰ ریال کمتر نیست بنابراین جوابهای همچندی وقتی جواب مسئله اند که این شرطها در آنها صدق کند یعنی $x > y > 50$ و یا چون در همچندی

$$y = \frac{1260 - 5x}{3} \qquad (1)$$

است

بنابراین $x > \frac{1260 - 5x}{3} > 50$ که از حل این دو نامساوی نتیجه میگیریم

$$157{,}5 < x < 222$$

برای اینکه جوابهای همچندی (۱) در مسئله صدق کند باید قیمت یکمتر ماهوت را زیادتر از ۱۵۷٫۵ ریال و کمتر از ۲۲۲ ریال اختیار کنیم تا قیمت فاستونی از ۵۰ ریال بیشتر شود و از قیمت ماهوت کمتر باشد در حالت مخصوص اگر قیمت یکمتر ماهوت را مساوی ۱۵۷٫۵ ریال بگیریم قیمت یکمتر فاستونی نیز مساوی ۱۵۷٫۵ ریال میشود و اگر قیمت یک متر ماهوت را مساوی ۲۲۲ ریال اختیار کنیم قیمت یکمتر فاستونی مساوی ۵۰ ریال میشود.

تمرین

۱- عددی دو پیکری پیدا کنید که مجموع دو پیکرش ۵ باشد.

۲- پیاده ای راهی را در مدت دو ساعت پیموده درازای راه و تندی متوسطش را حساب کنید.

۳- اگر قیمت یک جلد کتاب جبر ۱۵ ریال و قیمت یک جلد هندسه ۱۲ ریال باشد میخواهیم با ۱۶۵ ریال از این کتابها بخریم از هر کدام چند جلد باید بدهند.

راهنمائی - شمارهٔ کتابها باید عدد درست و مثبت باشد

۴- دهقانی با مبلغ ۶۲۰۰ ریال میخواهد چند گاو و گوسفند بخرد اگر قیمت هر گاو ۶۰۰ ریال و قیمت هر گوسفند ۷۰ ریال باشد با این مبلغ چند گاو و چند گوسفند میتواند بخرد؟

راهنمائی - شمارهٔ گاوها و گوسفندها باید درست و مثبت باشد

مسئله ۲ - قیمت ۵ متر ماهوت و سه متر فاستونی بر رویهم ۱۲۶۰ ریال است معلوم کنید قیمت یکمتر هر کدام را در صورتیکه قیمت دو متر ماهوت ۲۴۰ ریال از قیمت ۵ متر فاستونی کمتر باشد

حل - چون قیمت یک متر ماهوت را x ریال و قیمت یکمتر فاستونی را y ریال بگیریم از روی فرض مسئله این دو همچندی بدست میآید:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1260 \\ 2x = 5y - 240 \end{cases}$$

از همچندی اوّل $y = \frac{1260 - 5x}{3}$

و از همچندی دوّم $y = \frac{2x + 240}{5}$ و چون y (قیمت یکمتر فاستونی) در هر دو همچندی یکیست پس خواهیم داشت:

$$\frac{2x+240}{5}=\frac{1260-5x}{3}$$

که یک همچندی یک مجهولی از درجهٔ اوّل است و جواب آن $x = 180$ ریال است که از روی آن قیمت یک متر فاستونی $y = 120$ ریال بدست میآید

۶۰- از روی مسئلهٔ بالا بدو همچندی $5x+3y = 1260$ و $2x = 5y-240$ رسیدیم. گویند این دو همچندی تشکیل یکدستگاه دو همچندی دو مجهولی درجهٔ اوّل را میدهند و آن را چنین نویسند:

$$\begin{cases} 5x+3y=1260 \\ 2x=5y-240 \end{cases}$$

۶۱- تبصره- از مسئلهٔ بالا معلوم میشود که هرکدام از مجهولهای یکدستگاه در تمام همچندیهای آن دستگاه نمایش یکعدد است (چنانکه در همچندیهای دستگاه بالا $x = 180$ و $y = 120$ است)

۶۲- حل یکدستگاه- حل یکدستگاه پیدا کردن عددها یا عبارتهائیست که که در همچندیهای دستگاه صدق کند یعنی چون هریک از آنعددها یا عبارتها را بجای مجهول نظیر خودش بگذارند همچندیهای آن دستگاه بتساویهای عددی یا اتحاد تبدیل شود و این عددها یا عبارتها را جواب دستگاه گویند مانند $x = 180$ و $y = 120$ که جواب دستگاه دو همچندی دو مجهولی

$$\begin{cases} 5x+3y=1260 \\ 2x=5y-240 \end{cases}$$

است

۶۳- تبصره- از حل مسئلهٔ ۲ (صفحه ۱۲۳) می‌بینیم که برای هریک از مجهولهای x و y یک جواب بدست میآید درصورتیکه هریک از همچندیهای دستگاه دارای جوابهای بیشمار است و معلوم میشود که بین این جوابها فقط یکعدد برای x و یک عدد برای y یافت میشود که در هر دو همچندی دستگاه صدق می‌کنند یعنی عموماً یکدستگاه دو همچندی دو مجهولی درجهٔ اول دارای یک جوابست

تمرین شفاهی

۱- رسیدگی کنید که عددهای $\begin{matrix}2\\-5\end{matrix}$ | جواب کدام یک از دستگاههای زیر است

$$\begin{cases} 3x-16=2y \\ x-y=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1=3y \\ 5x-2y=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-\frac{1}{2}=y \\ \frac{x}{3}+2y=\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{5}=2 \\ 2x-5y=29 \end{cases}$$

۲- در دستگاههای زیر رسیدگی کنید آیا عددهائیکه جلوی هر دستگاه نوشته شده جواب آن دستگاه هست یا نیست

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - 1 = \frac{y}{4} - 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \Big| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 1{,}5x - 0{,}5y = 5 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 0 \end{cases} \quad \Big| \begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y + \frac{1}{3} \\ 3x - \frac{2}{5} = y - 1 \end{cases} \quad \Big| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}$$

۱- حلّ دستگاهٔ دو همچندی دو مجهولی درجهٔ اوّل

۶۴- حل کردن یکدستگاه دو همچندی دو مجهولی چنانکه گفتیم (شمارهٔ ۶۲) پیدا کردن جواب دستگاه است یعنی عددها یا عبارتهائی که هرگاه بجای مجهولها گذارده شود هر همچندی دستگاه بیک تساوی عددی یا یک اتحاد تبدیل شود.

۶۵- قاعدهٔ حل- قاعدهٔ کلّی برای حلّ یکدستگاه دو همچندی دو مجهولی (یا چند همچندی چند مجهولی) آنستکه از روی آن دستگاه همچندی هائی یک مجهولی پیدا کنیم بطوریکه جواب آن همچندیها جواب دستگاه باشد

برای این منظور این نکته را در نظر میگیریم که جواب هر مجهول عدد یا عبارتیست که در تمام همچندیهای دستگاه صدق کند.

مثال ۱- دستگاه دو همچندی دو مجهولی :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$ را حل کنید

حل- از روی این دستگاه میتوان یک همچندی یک مجهولی برحسب y بدست آورد و برای این کار کافیست که یکی ازین دو همچندیرا از دیگری کم کنیم (زیرا چون هریک نمایش یک تساوی عددی هستند بنابراین از کاستن آنها از هم نیز یک تساوی عددی پیدا میشود) مثلاً اگر دو طرف همچندی اوّل را بترتیب از دو طرف همچندی دوّم کم کنیم (چون هر مجهول در دو همچندی دستگاه نمایش یکعدد داست) این همچندی بدست میآید $3y = 3$ که از آن پیدا میشود $y=1$

وچون بجای y در یکی از دو همچندی دستگاه (مثلاً همچندی دوّم) عدد ۱ را گذاریم همچندی یک مجهولی $3x + 1 = 7$ بدست میآید که از حلّ آن $x = 2$ است پس جواب دستگاه عددهای ۱ و ۲ میباشند (که چون بجای x و y در همچندیهای دستگاه گذاریم چنانکه دیده میشود دو تساوی عددی $3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$ و $3 \times 2 + 1 = 7$ پیدا میشود)

مثال ۲- دستگاه دو همچندی دو مجهولی :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x + 5y = -8 \end{cases}$$ را حل کنید

برای پیدا کردن یک همچندی یک مجهولی برحسب y باید مجهول x را حذف کرد دراینجا دو طرف همچندی اوّل را در ۲ و دو طرف همچندی دوّم را در ۳ ضرب میکنیم این دستگاه حاصل میشود

$$\begin{cases} 6x - 4y = 2 \\ -6x + 15y = -24 \end{cases}$$

حال چون این دو همچندیرا باهم جمع کنیم همچندی یک مجهولی $11y = -22$ بدست میآید که جواب آن $y = -2$ است و چون بجای y در همچندی اوّل ۲- قرار دهیم همچندی یک مجهولی $3x + 4 = 1$ پیدا میشود که جواب آن $x = -1$ است عددهای ۱- و ۲- جواب دستگاه بالا است

ازین دو مثال این قاعده بدست میآید :

۶۶- قاعدهٔ اوّل- نخست جمله های متشابه دو طرف را جمع میکنیم بطوریکه هر مجهول در هر همچندی در یکجمله باشد تا دستگاه دو همچندی دو مجهولی بصورت کلّی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ درآید

پس ازآن برای حلّ این دستگاه باید درصورت لزوم هریک از دو همچندی دستگاه را در عددی مناسب ضرب کنیم تا قدر مطلق ضریبهای یکی از مجهولها (مجهولیراکه میخواهیم حذف کنیم) در دو همچندی مساوی شود. پس ازآن اگراین دو ضریب دارای یک نشانه باشند دو همچندی حاصل را ازهم کم میکنیم واگرنه آنهارا باهم جمع میکنیم تا یک همچندی یک مجهولی (برحسب مجهول دیگر) بدست آید. چون این همچندی یک مجهولیرا حل کنیم یک مجهول پیدا می شود وازروی آن مجهول دیگر بدست میآید.

تبصره- ممکن است که مجهول دوّم را نیز بوسیلهٔ حذف مجهول اوّل بدست آورد وقتیکه بخواهیم فقط یکی از دو مجهولرا باین قاعده حذف کنیم بهتر است مجهولی را حذف کنیم که مساوی کردن ضریبهایش آسانتر باشد.

مثال- میخواهیم دستگاه

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ راکه بصورت کلّی است ازروی این قاعده حل کنیم

حل- برای پیدا کردن x مجهول y را حذف میکنیم. کافیست دو طرف همچندی اوّل را در b' (ضریب y در همچندی دوّم) و دو طرف همچندی دوّم را

در b (ضریب مجهول y در همچندی اوّل) ضرب کنیم این دستگاه بدست میآید

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ a'bx + bb'y = bc' \end{cases}$$

چون ضریب y در هر دو همچندی این دستگاه یکیست آنها را از هم کم میکنیم این همچندی پیدا میشود $ab'x - a'bx = cb' - bc'$

و یا $(ab' - ba')x = cb' - bc'$ که بفرض $ab' - ba' \neq 0$

جواب x چنین میشود $x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$

اگر بجای x در یکی از دو همچندی جواب x را قرار دهیم و یا اینکه x را در دو همچندی دستگاه حذف کنیم یک همچندی یک مجهولی برحسب y بدست میآید که از حل آن $y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$ پس جواب دستگاه (۱) چنین است

$$(۲) \quad \begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{cases}$$

تبصره - برای مساوی کردن ضریبهای یک مجهول چنانکه در مثال بالا دیدیم قاعده آنستکه دو طرف همچندی اوّل را در ضریبی که آن مجهول در همچندی دوم دارد و دو طرف همچندی دوّم را در ضریب آن مجهول در همچندی اول ضرب کنیم ولی برای ساده شدن عمل بهتر آنستکه پس ضریبهای آن مجهول کوچکترین مضرب پیدا نموده

دو طرف هر همچندی را در بهر این کوچکترین مضرب بر ضریب آن مجهول در آن همچندی ضرب کنیم.

مثلاً میخواهیم y را در این دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۱۸y = ۱ \\ \frac{۲}{۳}x + ۲۴y = ۵ \end{cases}$ حذف کنیم کوچکترین مضرب ضریبهای y (عددهای ۱۸ و ۲۴) ۷۲ است بنابراین دو طرف همچندی اوّل را در $\frac{۷۲}{۱۸} = ۴$ و دو طرف همچندی دوّم را در $\frac{۷۲}{۲۴} = ۳$ ضرب میکنیم این دستگاه پیدا میشود:

$$\begin{cases} ۱۲x - ۷۲y = ۴ \\ ۲x + ۷۲y = ۱۵ \end{cases}$$

که ضریبهای y در دو همچندی آن مساویست:

تمرین

اوّلاً برای حلّ دستگاههای زیر بقاعدهٔ اوّل معلوم کنید آیا کدام یک از دو مجهول را حذف کنیم بهتر است؟

ثانیاً هریک را بقاعدهٔ بالا حل کنید

$$\begin{cases} x + y = \frac{۱}{۳} \\ x + ۳y = ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -۵ \\ x - y = ۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5y=1{,}5 \\ 2x+4y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=\frac{7}{5} \\ 2x+y=\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y=11{,}5 \\ 2x-5y=-1{,}4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t+5u=3 \\ t-u=0{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} m+10n=2\frac{1}{2} \\ 3m-5n=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3p-2q=\frac{2}{3} \\ 4p-6q=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b=1 \\ \frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}5x-3{,}5y=-0{,}5 \\ 10x+12y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}5p-2q=0{,}5 \\ 3p+5q=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{3}t+\frac{3}{2}u=7\frac{5}{6} \\ \frac{3}{4}t-4u=-11\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y)+3y=9 \\ 3(x+y)=3+6y \end{cases}$$

(ممکن است $x+y$ را از همچندهای این دستگاه حذف نمود)

قاعدهٔ دوّم

مثال ۱- این دستگاه دو مجهولی

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$$

را حل کنید.

حل - میتوانیم یک همچندی یک مجهولی ازین دستگاه بدست آوریم بدین ترتیب: که مثلاً x را از همچندی اوّل بحسب y پیدا میکنیم: $x=1-3y$ (۱)

و $1-3y$ را بجای x در همچندی دوم میگذاریم این همچندی یک مجهولی پیدا میشود:

$$2(1-3y)-y=-5$$

ویا $-7y=-7$ ویا $y=1$

اگر 1 را بجای y در همچندی (۱) گذاریم x پیدا میشود:

$$x=1-3\times 1=-2$$

ممکن بود که y را برحسب x در یکی از دو همچندی دستگاه پیدا نموده در همچندی دیگر ببریم تا یک همچندی یک مجهولی برحسب x بدست آید.

ازین مثال قاعدهٔ دیگری برای حلّ دستگاه دو مجهولی بدست میآید:

۶۷- قاعدهٔ دوّم - پس ازآنکه دستگاه را بصورت کلّی

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

در آوردیم از یکی از دو همچندی مجهولی را (مثلاً x) بحسب مجهول دیگر (مثلاً y) پیدا کرده در همچندی دیگر بجای آن مجهول (یعنی x) میگذاریم تا یک همچندی یک مجهولی برحسب مجهول دیگر (یعنی y) بدست آید.

از حلّ این همچندی مجهول دیگر (یعنی y) پیدا و از روی آن مجهول اوّل حساب میشود

یادآوری - برای حلِّ یک دستگاه با این قاعده بهتر آنست مجهولی را از میان ببریم که ضریبش ساده‌تر از ضریبهای دیگر باشد.

مثال - دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را بقاعدهٔ دوّم حل کنید

حل - از یکی از دو همچندی دستگاه مثلاً از همچندی اوّل یکی از دو مجهول مثلاً x را اگر $a \neq 0$ باشد برحسب y پیدا می‌کنیم $x = \frac{c - by}{a}$ (۱)

و این مقدار را بجای x در همچندی دوّم دستگاه میگذاریم این همچندی یک مجهولی بدست میآید:

$$a' \times \frac{c - by}{a} + b'y = c'$$

و یا $a'c - ba'y + ab'y = ac'$ و یا

$(ab' - ba')y = ac' - ca'$ که بفرض $ab' - ba' \neq 0$ جواب y چنین میشود $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$ که چون در همچندی (۱) بجای y مساویش را قرار دهیم جواب x بدست میآید:

$$x = \frac{c - b\,\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}}{a} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

تمرین

اولاً در دستگاههای زیر کدام مجهول با این قاعده حذف شود تا حل دستگاه آسانتر شود

ثانیاً هر یک از دستگاههای زیر را با قاعدهٔ دوّم حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1,5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - 2x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - \frac{1}{4}b = -1 \\ b = \frac{a}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5q - 4p = 0 \\ 2q = 8p \end{cases} \qquad \begin{cases} 2,5x - y = 1,5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 1 \\ y - 3x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m - \frac{1}{3}n = -1 \\ 4m + 2n = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1,5y = -2,5 \\ 1,5x - 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{3}u - \frac{1}{4}v = 0 \\ \frac{5}{6}u - \frac{7}{4}v = -1 \end{cases}$$

قاعدهٔ سوّم

مثال - دستگاه دو همچندی دو مجهولی

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$$ را

حل کنید.

حل - در دو همچندی دستگاه یک مجهول (مثلاً x) را برحسب مجهول دیگر پیدا میکنیم از همچندی اوّل $x = \frac{1+3y}{2}$ و از همچندی دوّم $x = \frac{12-2y}{5}$ چون جواب x در دو همچندی یکی است بنابراین از مقایسهٔ این دو مقدار x یک همچندی یک مجهولی برحسب y بدست میآید:

$$\frac{1+3y}{2} = \frac{12-2y}{5}$$

از حلّ آن جواب y چنین است $y = 1$ و از آنجا جواب x چنین میشود:

$$x = \frac{1+3\times1}{2} = 2$$

ازین مثال این قاعده بدست میآید:

۶۸ - قاعدهٔ سوّم - پس از تبدیل دستگاه بصورت کلّی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

در همچندیهای دستگاه یک مجهول (مثلاً x) را برحسب مجهول دیگر (یعنی y)

پیدا میکنیم و چون دو عباریتکه بدست میآیند با هم مساویند از تساوی آنها یک همچندی یک مجهولی برحسب مجهول دیگر (یعنی y) تشکیل میشود و از حلّ آن جواب مجهول (یعنی y) بدست میآید و از روی آن مجهول دیگر (یعنی x) حساب میشود.

مثال - دستگاه دو مجهولی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ را با این قاعده

حل کنید

حل - x را در هر همچندی برحسب y پیدا میکنیم در همچندی اوّل $x = \frac{c-by}{a}$ و در همچندی دوّم $x = \frac{c'-b'y}{a'}$

از مقایسهٔ دو مقدار x این همچندی یک مجهولی بدست میآید

$$\frac{c-by}{a} = \frac{c'-b'y}{a'}$$

که از حلّ آن جواب y چنین میشود $y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ و از روی آن جواب x بدست میآید $x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$

تمرین

این دستگاهها را با قاعدهٔ سوّم حل کنید:

$$\begin{cases} a + 2b = 0.5 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{4} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m - \frac{1}{2}n = 1 \\ n - \frac{1}{3}m = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2.5a - 1.5b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} \\ x = 2y - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = \frac{1}{3}x + 1 \\ 2y - 1 = x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - n = 3 \\ 2m - n + 1 = \frac{m-n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p - 2q = \frac{p+q}{3} \\ p + q = 1 \end{cases}$$

۶۹- دستورهای کرامر[1]- چنانکه دیدیم جواب دستگاه

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

از روی دستورهای زیر موسوم بدستورهای کرامر بدست میآید:

$$\begin{cases} x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{cases} \quad \text{(دستورهای کرامر)}$$

میتوان از روی این دستورها نیز دستگاه دو همچندی دو مجهولی را حل نمود بدین طریق که اوّل آن دستگاه را بصورت دستگاه کلّی بالا درآورده (یعنی بقسمی که جمله های مجهول بیک طرف و معلوم بطرف دیگر برده شود و در دو همچندی x ها زیر هم و y ها نیز زیر هم نوشته شود) بعد درین دستورها بجای ضریبهای a و a' و b و b' و c و c' مقدارهای نظیر هریک را قرار داده جواب مجهولها را حساب کنیم

مثال- دستگاه

$$\begin{cases} 5(x+2) - 23 = 3(y+1) \\ 3(x-2) + 5(y-1) = 19 \end{cases}$$

را از روی دستورهای کرامر حل کنید

نخست این دستگاه را ساده می کنیم تا باینصورت درآید:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases}$$

پس از آن در دستورهای کرامر بجای ضریبها مقدارهای نظیرشان را قرار میدهیم تا جواب x و y بدست آید:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = \frac{16 \times 5 - (-3) \times 30}{5 \times 5 - (-3) \times 3} = \frac{80 + 90}{25 + 9} = \frac{170}{34} = 5$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{5 \times 30 - 16 \times 3}{5 \times 5 - (-3) \times 3} = \frac{150 - 48}{25 + 9} = \frac{102}{34} = 3$$

تبصره- دستورهای کرامر را که بصورت برخه هستند میتوان چنین بخاطر سپرد:

x و y هردو دارای یک برخه‌نام میباشند که از ضریبهای مجهولها تشکیل شده است باین ترتیب که ضریب x همچندی اوّل را در ضریب y همچندی دوّم و همچنین ضریب y همچندی اوّل را در ضریب x همچندی دوّم ضرب میکنیم و دو حاصل ضرب را از هم کم میکنیم این تفاضل همان برخه‌نام x و y است ($ab' - ba'$ یا $ba' - ab'$) و برای تعیین برخه‌شمار هر مجهول کافیست که در برخه‌نام بجای ضریبهای آن مجهول مقدار معلوم نظیر آنرا بگذاریم مثلاً اگر برخه‌نام را $ab' - ba'$ بگیریم برخه‌شمار x این طور بدست میآید که درین عبارت بجای a و a' بترتیب c و c' را بگذاریم تا $cb' - bc'$ بدست آید

پس

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}$$

و همچنین

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}$$

تنبیه - واضح است که هر دستگاه دو همچندی دو مجهولی را میتوان از روی هریک از قاعده‌های بالا حل کرد ولی عموماً از روی یکی ازین قاعده‌ها زودتر جواب بدست میآید. با دانش‌آموز است که در حلِ هر دستگاه قاعدهٔ آسانترا بکار برد.

تمرین

۱- هریک از دستگاههای زیر را بهر سه قاعده و همچنین از روی دستورهای کرامر حل کنید:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 100 \\ 3x - y = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 4y = 47 \\ 2x + 5y = 53 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8p - 15q = -30 \\ 2p - 3q = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + 5b = 1 \\ 6a + 7b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 11b = -9 \\ a - 3b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 6y = 6 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 7z = 17 \\ 7x - 5z = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5m - 4n = 6 \\ 8m - 7n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21x + 8y + 66 = 0 \\ 23y - 28x + 13 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 3y - 2 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 19 \\ y = 3x - 27 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10a + 7b + 4 = 0 \\ 6a + 5b + 2 = 0 \end{cases}$$

۲- اوّلاً معلوم کنید که هریک از دستگاههای زیر از روی کدام قاعده آسانتر حل میشود.

ثانیاً از روی آن قاعده آن دستگاه را حل کنید.

$$(۱)\quad \begin{cases} \frac{۱}{۲}x = \frac{۱}{۳}y + ۱ \\ \frac{۱}{۴}x = \frac{۴}{۳}y - ۱۰ \end{cases} \qquad (۲)\quad \begin{cases} \frac{۳}{۴}x - ۲y = ۹ \\ \frac{۱}{۳}x - y = ۰ \end{cases}$$

(درین دو مثال بهتر اینست که برخه نماها را از بین نبریم زیرا چون دو طرف همچندی اوّل دستگاه (۱) را بر ۲ تقسیم کنیم در دو همچندی دستگاه x بسهولت حذف میشود و همچنین اگر دو طرف همچندی دوّم دستگاه (۲) را در ۲ ضرب کنیم y بسهولت حذف میشود)

$$\begin{cases} ۲\frac{۱}{۴}x = ۳\frac{۱}{۳}y + ۴ \\ ۲\frac{۱}{۵}y = ۳\frac{۱}{۴}x - ۴۷ \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{۲}{۳}x + \frac{۳}{۵}y = ۱۷ \\ \frac{۳}{۴}x + \frac{۲}{۳}y = ۱۹ \end{cases}$$

(درین دو دستگاه بهتر اینست که نخست برخه نماها را از بین ببریم)

$$\begin{cases} ۵x - ۴y + ۱ = ۰ \\ ۱٫۷x - ۲٫۴y + ۷٫۹ = ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۵x - ۴٫۹y = ۱ \\ ۳x - ۲٫۹y = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲۷٫۴x - ۳۱٫۵y = ۱۱ \\ ۲۱٫۴x - ۲۶٫۵y = ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲٫۷x + ۲٫۶y = ۸٫۸ \\ ۰٫۹x + ۲٫۲y = ۴٫۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲٫۶x - ۰٫۴۱y - ۲٫۲۲۲ + ۲\frac{۱}{۲}x = ۰ \\ ۰٫۵۱x - ۳٫۶y + ۳٫۳۳۳ - \frac{۱}{۲}y = ۰٫۳۰۸ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۵(x+۲) - ۳(y+۱) = ۲۳ \\ ۳(x-۲) + ۵(y-۱) = ۱۹ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۳}(y+۱) = ۱\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳}(x-۱) - \frac{۱}{۲}y = ۴\frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۲}(y+۱) = ۱ \\ \frac{۱}{۳}(x+۱) + \frac{۳}{۴}(y-۱) = ۹ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۳x+۱} = \frac{۲}{۵y+۴} \\ \frac{۱}{۴x-۳} = \frac{۲}{۷y-۶} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{۵}{x+۲y} = \frac{۷}{۲x+y} \\ \frac{۷}{۳x-۲} = \frac{۵}{۶-y} \end{cases}$$

(درین دو دستگاه چون طرف دوّم هر همچندی را بطرف اول ببریم و طرف اوّل را بیک برخه تبدیل کنیم چون طرف دوّم صفر است کافی است برخه شمار این برخه را مساوی صفر قرار دهیم برای اینکه باین نتیجه برسیم بهتر این است که از اوّل دو طرف هر همچندی را در کوچکترین مضرب برخه نماها ضرب کنیم)

$$\begin{cases} \frac{۱۵x+۱}{۴۵-y} = ۸ \\ \frac{۱۲y+۱۹}{x-۱۰} = ۲۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+۳y}{x-y} = ۸ \\ \frac{۷x-۱۳}{۳y-۵} = ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۰٫۹x - ۰٫۷y + ۷٫۳}{۱۳x - ۱۵y + ۱۷} = ۰٫۲ \\ \frac{۱٫۲x - ۰٫۲y + ۸٫۹}{۱۳x - ۱۵y + ۱۷} = ۰٫۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+۲y+۱}{۲x-y+۱} = ۲ \\ \frac{۳x-y+۱}{x-y+۳} = ۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۲x-۳y}{۵} - ۱ = ۴x + \frac{۲x-۷y}{۲} \\ ۱۰x + \frac{۳x+۵y}{۳} = ۹ + \frac{x-y}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۲x-y+۳}{۳} - \frac{x-۲y+۳}{۴} = ۴ \\ \frac{۳x-۴y+۳}{۴} + \frac{۴x-۲y-۹}{۳} = ۴ \end{cases}$$

$$(x+y):(y+۱):(x-y) = ۳:۴:۵$$

این تسادی یکدستگاه دو همچندی دو مجهولی است ازینقرار:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{y+1} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{y+1}{x-y} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$(x-2):(y+1):(x+y-3) = 3:4:5$$

$$\begin{cases} (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-1)(3y+1) = 6(x+2)(y-3) \\ 4(3x+2)(y+1) = (4x-1)(3y+3) \end{cases}$$

۲- دستگاههای تبدیل پذیر

۷۰- بسیاری از دستگاه همچندی های دو مجهولی پس از ساده کردن (از بین بردن برخه نماها و جمع جمله های متشابه) از درجه های غیر اوّل میشوند ولی بسا اتفاق میافتد که براه ساده ای حل بعضی از آنها را بحل یک یا چند دستگاه دو همچندی دو مجهولی درجهٔ اوّل تبدیل نمود.

مثال ۱- دستگاه دو همچندی دو مجهولی

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{9}{y} = 4 \end{cases}$$

را حل کنید

حل - چون برخه نماها را از بین ببریم باین دستگاه دو مجهولی درجهٔ دوم میرسیم

$$\begin{cases} 4y \quad 4x = xy \\ 2y + 9x = 4xy \end{cases}$$

ولی اگر $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ را مجهول بگیریم و آنها را به X و Y بنمائیم

یعنی $\begin{cases} \frac{1}{x} = X \\ \frac{1}{y} = Y \end{cases}$ دستگاه (۱) بصورت سادهٔ

$$\begin{cases} 4X - 3Y = 1 \\ 2X + 9Y = 4 \end{cases}$$

میشود که نسبت به X و Y دستگاهی از درجهٔ اول است که چون آنرا بیکی از قاعده های پیش حل کنیم X و Y پیدا میشود $X = 1$ $Y = \frac{1}{3}$

یعنی $\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$

پس $x = 1$ و $y = 3$

تبصره - بعکس اگر دستگاهی بصورت

$$\begin{cases} ay + bx = cxy \\ a'y + b'x = c'xy \end{cases}$$ باشد

از تقسیم دو طرف هر همچندی به yx دستگاه دو مجهولی زیر که مانند دستگاه مثال (۱) است بدست میآید

$$\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \\ \frac{a'}{x} + \frac{b'}{y} = c' \end{cases}$$

که چون مانند مثال پیش آنرا حل کنیم چنین خواهیم داشت

پس $X = \frac{1}{x} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$

$$X = \frac{ab' - ba'}{cb' - bc'}$$

مثال ۲- دستگاه دو همچندی دو مجهولی زیر را حل کنید

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{3}{x+y} - \frac{1}{2x-y} = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{x+y} + \frac{3}{2x-y} = 1\frac{2}{3} \end{cases}$$

چون برخه نماها را از میان ببریم همچندیهای درجهٔ دوم بدست میآید

ولی اگر $\frac{1}{x+y}$ را u و $\frac{1}{2x-y}$ را v بنامیم یعنی

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{x+y} = u \\ \frac{1}{2x-y} = v \end{cases}$$

u و v نیز مثل x و y مجهولند برای پیدا کردن آنها با درنظر گرفتن دستگاه (۲) دستگاه (۱) را میتوان چنین نوشت

$$(3) \quad \begin{cases} 3u - v = \frac{2}{3} \\ 2u + 3v = \frac{5}{3} \end{cases}$$

از حلّ این دستگاه u و v بدست میآید $u = \frac{1}{3}$ و $v = \frac{1}{3}$ که چون بجای u و v در دستگاه (۲) مساویشانرا قرار دهیم دستگاه

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بدست میآید که چون آن را ساده کنیم بیک دستگاه دو مجهولی درجهٔ اول تبدیل میشود و از حلّ آن جواب دستگاه (۱) بدست میآید $x = 2$ و $y = 1$

مثال ۳- دستگاه دو همچندی دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$(1) \quad \begin{cases} 9y - 16x = 17 \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases}$$

طرف چپ همچندی اوّل دستگاه بر طرف چپ همچندی دوّم دستگاه بخش پذیر است زیرا دستگاه (۱) را میتوان چنین نوشت

$$(2)\quad \begin{cases} (3\sqrt{y}-4\sqrt{x})(3\sqrt{y}+4\sqrt{x})=17 \\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=-1 \end{cases}$$

چون در همچندی اول دستگاه (۲) بجای $4\sqrt{x}-3\sqrt{y}$ مساویش ۱- را قرار دهیم دستگاه (۲) چنین میشود

$$(3)\quad \begin{cases} 4\sqrt{x}+3\sqrt{y}=17 \\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=-1 \end{cases}$$

از جمع و تفریق این دو همچندی این دستگاه پیدا میشود

$$\begin{cases} 8\sqrt{x}=16 \\ 6\sqrt{y}=18 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases}$$

و چون دو طرف این دو همچندی را بتوان دوم برسانیم x و y بدست میآید

$$x=4 \quad \text{و} \quad y=9$$

تمرین

دستگاههای دو همچندی دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 17x-\dfrac{0.3}{y}=3 \\ 16x-\dfrac{0.4}{y}=1.7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{y}=3 \\ \dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{y}=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{0.7}+\dfrac{0.3}{y}=6 \\ \dfrac{10x}{0.7}+\dfrac{9}{y}=31 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-3}=7 \\ \dfrac{5}{x-2}-\dfrac{4}{y-3}=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{3x-2y+1}-\dfrac{2y}{x+y-1}=2 \\ \dfrac{x}{3x-2y+1}+\dfrac{3y}{x+y-1}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+5}-3\sqrt{y-2}=3 \\ 3\sqrt{x+5}-4\sqrt{y-2}=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=6 \\ 3\sqrt{x}-4\sqrt{y}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2xy \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=11 \\ 4x-9y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+3}}=1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{9}{\sqrt{y+3}}=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=4 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-2)(5y+1)=(5x-1)(y+2) \\ (3x-1)(y+5)=(x+5)(7y-1) \end{cases}$$

۳- بحث دستگاههای دو مجهولی درجهٔ اول

۷۱- بحث دستگاه دو مجهولی درجهٔ اول تحقیق در وجود جواب آن دستگاه است همانطور که پیش برای یک همچندی یک مجهولی عمل کردیم اینک بحل چند مثال میپردازیم

مثال ۱- این دستگاه را حل کنید

$$(A)\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$$

x را از همچندی اول برحسب y بدست میآوریم $x = \frac{1+3y}{2}$ (۱)
و آن را در همچندی دوم بجای x قرار میدهیم چنین میشود

$$4 \times \frac{1+3y}{2} - 6y = 2$$ و یا

$2 + 6y - 6y = 2$ درین همچندی یک مجهولی ضریب y و مقدار معلوم هر دو صفر است یعنی $0 \times y = 0$ پس بموجب (شمارهٔ ۴۶) y دارای جوابهای بیشمار است و بازاء هر مقداری از y جوابی برای x از همچندی (۱) بدست میآید پس دستگاه (A) دارای جوابهای بیشمار است.

مستقیماً هم میتوانستیم این مطلب را پیش بینی کنیم زیرا همچندی دوم دستگاه (A) همان همچندی اول دستگاه است که ضریبهایش در یک عدد (عدد ۲) ضرب شده پس در حقیقت این دستگاه شامل یک همچندی دو مجهولی است و چنانکه میدانیم (شمارهٔ ۵۶) یک همچندی درجهٔ اول دو مجهولی جوابهای بیشمار دارد و برای بدست آوردن آن جوابها میتوان بجای یکی از دو مجهول عددی اختیاری گذارد و مجهول دیگر را حساب نمود بنابراین ازین مثال چنین برمیآید که:

۷۲- هرگاه در دستگاه

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ این دو تساوی برقرار باشد

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ یعنی ضریبهای هر مجهول و همچنین معلومهای همچندیهای دستگاه نظیر بنظیر متناسب باشند این دستگاه بیکی از دو همچندی خودش تبدیل میشود و بنابراین دارای جوابهای بیشمار است

مثال ۲- این دستگاه دو مجهولی را حل کنید

$$(B)\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 1 \end{cases}$$

برای حل دستگاه x را حذف میکنیم بدین طریق که دو طرف همچندی اول را در ۳ ضرب مینمائیم تا دستگاه چنین شود

$$(1)\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 3x - 6y = 1 \end{cases}$$

از تفریق این دو همچندی y هم حذف شده حاصل میشود $0 = 8$ که نشدنیست پس معلوم میشود خود دستگاه نیز ناشدنی میباشد باین معنی که نمیتوان دو عدد پیدا کرد که چون بجای مجهولهای دستگاه گذاشته شود دو تساوی عددی بدست آید
ملاحظه می کنیم که سبب حذف شدن y تناسب بودن ضریبهای دو مجهول (x و

y) در دو همچندی است و علت ناشدنی اینست که جمله های معلوم دو همچندی متناسب با ضریبهای مجهولهای دو همچندی نبوده است پس باین نتیجه میرسیم:

۷۳- هرگاه در دستگاه دو همچندی دو مجهولی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد یعنی نسبت میان ضریبهای x و y یکی بوده و مخالف نسبت بین دو معلوم باشد دستگاه ناشدنی بوده و دارای جواب نیست

تبصره - از روی دستگاه (۱) که هم ارز دستگاه (B) است بخوبی می بینیم که دستگاه (B) ناشدنیست زیرا نمیشود یکدفعه $3x - 6y$ برابر ۹ و یکدفعه برابر ۱ باشد

خلاصهٔ بحث بالا را میتوان چنین نوشت:

۷۴- حالت اوّل - هرگاه در دستگاه دو همچندی دو مجهولی

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ضریبهای هر مجهول نظیر بنظیر متناسب با معلومها باشد

یعنی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (۲)

دستگاه مبهم است یعنی دستگاه در حقیقت دارای یک همچندی است و بنابراین جوابهای بسیار دارد.

حالت دوّم - اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ (۳)

باشد دستگاه جواب ندارد.

حالت سوّم - در غیر این دو حالت یعنی وقتیکه $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (۴)

باشد دستگاه دارای یک جواب معیّن است

$$(5) \quad \begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{cases}$$

تبصره - نتیجهٔ بحث بالا را از روی عبارت جوابها نیز میتوان بدست آورد بدینطریق:

اگر دستگاه (۱) دارای جواب باشد جواب آن بصورت (۵) است و در موقعی دستگاه (۱) دارای یک جواب معیّن است که برخه نام $ab' - ba' \neq 0$ باشد که از آن نتیجه میشود $ab' \neq ba'$ و یا $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

حال اگر $ab' - ba' = 0$ باشد و مثلاً $ac' - ca' \neq 0$ باشد

یعنی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ولی $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد دستگاه ناشدنی است

(درینحالت $cb'-bc'$ نیز مخالف صفر است . چرا ؟)

بالاخره اگر $ab'-ba'=0$ و مثلاً $ac'-ca'$ نیز برابر صفر باشد یعنی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ دستگاه دارای جوابهای پیشمار است

(درینحالت $bc'-cb'$ نیز صفر است . چرا ؟)

مثال ۱- دستگاه دوهمچندی دومجهولی

$$\begin{cases}(2-\lambda)x+y=\lambda+4\\(\lambda+4)x+(3\lambda+2)y=8-7\lambda\end{cases}$$

راحل نموده و درازاء مقدارهای مختلف λ در وجود جواب آن بحث کنید

اگر $ab'-ba'$ یعنی $3\lambda(1-\lambda)$ مخالف صفر باشد (یعنی λ نه صفر باشد و نه ۱) درینصورت دستگاه دارای یک جواب معیّن است

$$x=\frac{\lambda+7}{1-\lambda} \quad \text{و} \quad y=\frac{2(\lambda-5)}{1-\lambda}$$

درحالتیکه $\lambda=0$ یا $\lambda=1$ باشد $ab'-ba'$ مساوی صفر میشود

حالت اوّل $\lambda=0$ درینصورت $ac'-ca'$ نیز صفر میشود و دستگاه چنین میشود

$$\begin{cases}2x+y=4\\4x+2y=8\end{cases}$$

یعنی ضریبهای هر مجهول و مقدارهای معلوم متناسبند درینحالت دستگاه دارای جوابهای پیشمارند

حالت دوّم $\lambda=1$ درینحالت $ac'-ca'$ مخالف صفر است و دستگاه بصورت ناشدنی

$$\begin{cases}x+y=5\\5x+5y=1\end{cases}$$

درمیآید که دارای جواب نیست .

مثال ۲- بجای α و β چه عددهائی بگذاریم تا این دستگاه مبهم شود؟

$$(1)\quad\begin{cases}(\alpha-\beta)x+(3\alpha-5)y=2\alpha\beta\\(\alpha+\beta)x+(\beta-7)y=6\alpha\beta\end{cases}$$

برای اینکه دستگاه مبهم شود باید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد و یا

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3\alpha-5}{\beta-7}=\frac{2\alpha\beta}{6\alpha\beta}=\frac{1}{3}$$

ازین تساوی یک دستگاه دوهمچندی دومجهولی برحسب α و β بدست میآید

$$\begin{cases}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{1}{3}\\\frac{3\alpha-5}{\beta-7}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

جوّاب این دستگاه چنین است $\alpha=\frac{16}{17}$ و $\beta=\frac{8}{17}$ که بازاء

آنها دستگاه (۱) مبهم و باینصورت میشود

$$\begin{cases} \frac{۸}{۱۷}x - \frac{۳۷}{۱۷}y = (\frac{۱۶}{۱۷})^۲ \\ \frac{۲۴}{۱۷}x - \frac{۱۱۱}{۱۷}y = ۲(\frac{۱۶}{۱۷})^۲ \end{cases}$$

پرسش های شفاهی

۱- اوّلاً پیش از حل معلوم کنید کدام یک از دستگاههای زیر مبهم و کدام یک ناشدنی و کدام یک دارای یک جواب معیّنی است

$$\begin{cases} ۳x - ۱ = y \\ ۲y = ۳x + ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = ۲ \\ ۲x = ۴ - ۲y \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲y = x + ۱ \\ ۳y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۳}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x - ۲ \\ y = x - ۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳x - ۲y = ۱ \\ ۲x - ۳y = -۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = ۱ \\ ۲ - x = y \end{cases}$$

ثانیاً از روی حلّ هر یک نیز در وجود جواب آنها تحقیق کنید.

۲- یک دستگاه مبهم و یک دستگاه ناشدنی درست کنید.

۳- همچنین دو تا از این دستگاه ها را بنویسید بطوریکه دستگاهها ناشدنی باشد یا قسمی اختیار کنید که دستگاهها مبهم باشد و یا هر یک دارای یک جواب معیّنی باشند.

$$\begin{cases} a - ۲ = b \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = ۳ + ۵b \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} ۳m - ۲n = ۵ \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳y = ۳ - ۲x \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲x + y - ۲ = ۰ \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

تمرین

۱- دستگاههای دومجهولی زیر را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} ۲bx - ay = ab \\ bx + ۲ay = ۳ab \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = a^۲ + ab \\ x + y = ۲a \end{cases}$$

$$\begin{cases} cx + dy = c^۲ + cd \\ dx + cy = cd + d^۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} a(x - a) = b(y - a) \\ b(x + b) = a(y + b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = a^۳ + ۲a^۲b + b^۳ \\ bx + ay = a^۳ + ۲ab^۲ + b^۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = ۲a \\ x + y = \frac{a^۲ + b^۲}{ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c \\ \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = c' \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۲ \\ ax + b^۲ = a^۲ + by \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{2} + \dfrac{y-b}{3} = a \\ \dfrac{x-b}{3} + \dfrac{y-a}{2} = b \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a-b} \\ \dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a+b \\ \dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2+b^2)(x-1) = ab(2x-y) \\ 4x = y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx = ay \\ \dfrac{a}{x} = c + \dfrac{b}{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-a}{y-a} = \dfrac{a-b}{a+b} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \end{cases}$$

$$\frac{2x-b}{a} = \frac{2y+a}{b} = \frac{3x+y}{a+2b}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+m}{2m} + \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{y+m}{2} + \dfrac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1} = \dfrac{a+b}{a-b} \\ \dfrac{x-1}{y+1} = \dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

۲- اولاً ثابت کنید که این دستگاه همیشه دارای یک جواب معین است هرچه باشد

مقدار m

$$\begin{cases} mx - 3y = 7 \\ 3x + my = -35 \end{cases}$$

ثانیاً چه عددی بجای m بگذاریم تا x مساوی y شود.

۳- در دستگاه زیر بجای α عددی بگذارید تا x و y برنسبت $\frac{3}{8}$ باشند

$$\begin{cases} (\alpha-1)x - 2y = 12 \\ 4\alpha x + (3\alpha+2)y = 5 \end{cases}$$

۴- در دستگاه

$$\begin{cases} (\alpha+2)x + (1+5\alpha)y = 15 \\ (5-2\alpha)x + (1-10\alpha)y = 9 \end{cases}$$

چه عددی بجای α گذاریم تا رابطه زیر بین ریشه‌ها برقرار باشد:

$$x + y = -6$$

۵- در این دستگاه

$$\begin{cases} \alpha x - 6y = 5\alpha - 3 \\ 2x + (\alpha-7)y = -7\alpha + 29 \end{cases}$$

α را طوری پیدا کنید که دستگاه مبهم شود و یا ناشدنی گردد و یا جواب x با y مساوی شود

راهنمائی- برای اینکه دستگاه مبهم یا ممتنع باشد باید $\frac{\alpha}{2} = \frac{-6}{\alpha-7}$ باشد و

پس از ساده کردن $\alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0$ و یا موافق (شمارهٔ ۱۲۲ تجزیهٔ کتاب اول)

بصورت $(\alpha-3)(\alpha-4) = 0$ میشود که اگر $\alpha = 3$ باشد دستگاه مبهم و اگر

$\alpha = 4$ باشد دستگاه نشدنی میشود

۶- در دستگاه

$$\begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ (3+\alpha)x + (4+\beta)y = 2 \end{cases}$$

α و β را طوری پیدا کنید که دستگاه مبهم یا ناشدنی باشد

۷- در دستگاه

$$\begin{cases} ax - (b-1)y + 1 = 0 \\ 4x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

بجای a و b چه عددهائی گذاریم تا دستگاه مبهم و یا ناشدنی شود ؟

۸- در دستگاه

$$\begin{cases} (3\alpha - 5\beta + a)x + (8\alpha - 2\beta - b)y = 1 \\ (2\alpha - 3\beta + a)x + (4\alpha - \beta)y = 2 \end{cases}$$

α و β را برحسب a و b طوری تعیین کنید که دستگاه مبهم شود

۴- دستگاههای n مجهولی درجهٔ اوّل

۷۵- هرگاه مجهولهای x و y و z و غیره در چند همچندی درجهٔ اوّل صدق کنند آن چند همچندی تشکیل یک دستگاه چند مجهولی درجهٔ اوّل را میدهند مثلاً اگر بین x و y و z این سه همچندی برقرار باشد

$2x - y + z = 1$ و $x - y = 2$ و $y + z = 5$

این سه همچندی تشکیل یک دستگاه سه همچندی سه مجهولی درجهٔ اوّل را میدهند و آنرا چنین نویسند :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y = 2 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

همچنین است دستگاه دو همچندی سه مجهولی

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = z \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

جواب یک دستگاه عددها یا عبارتهائیست که چون بجای مجهولهای نظیر خود در همچندیهای دستگاه قرار دهیم آن همچندیها بتساویهای عددی یا اتحادها تبدیل شود

حَلّ یک دستگاه پیدا کردن جواب آن دستگاه است

۷۶- قاعدهٔ کلی برای حَلّ یک دستگاه سه همچندی سه مجهولی درجهٔ اوّل

نخست بهتر آنستکه هر یک از همچندی های دستگاه را ساده کنیم پس از آن یکی از مجهولها را بیکی از قاعده هائیکه پیش گفتیم (شمارههای ۶۶ - ۶۷ و ۶۸) در همچندیهای دستگاه حذف کنیم مثلاً یک مجهول را از یک همچندی برحسب مجهولهای دیگر پیدا کرده بجای خودش در دو همچندی دیگر گذاریم تا دو همچندی دو مجهولی بدست آید . آن دستگاه دو مجهولی را بیکی از قاعده هائیکه میدانیم حل می کنیم و مجهول سوّم را از روی آنها بدست میآوریم .

مثال ۱- دستگاه سه همچندی سه مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 3z = -2 \\ x + 2y + 2z = 11 \end{cases}$$

حل - از دستگاه اول مثلاً x را پیدا میکنیم $x = 2 + y - z$ (۱)

و بجای x در دو همچندی دیگر میگذاریم این دستگاه دو مجهولی پیدا میشود

$$\begin{cases} 2(2 + y - z) + 3y - 3z = -2 \\ (2 + y - z) + 2y + 2z = 11 \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} 5y - 5z = -6 \\ 3y + z = 9 \end{cases}$$

از حل این دستگاه $z = 3$ و $y = 2$ واز روی همچندی (۱) x بدست میآید $x = 2 + 2 - 3 = 1$

مثال ۲- دستگاه سه همچندی سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$(1) \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 2x - 3y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

حل - چون همچندی اول یک همچندی دو مجهولی است برحسب x و y

کافی است که در دو همچندی دیگر z را حذف کنیم تا اینکه یک همچندی دیگر برحسب x و y بدست آید. برای این کار کافی است دو همچندی دوم و سوم را با هم جمع کنیم تا دستگاهی برحسب x و y بدست آید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$$

از روی این دستگاه x و y پیدا میشود که چون در یکی از دو همچندی دوم یا سوم دستگاه (۱) ببریم z بدست میآید.

مثال ۳- این دستگاه را حل کنید

$$(1) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 3 \end{cases}$$

حل - برای حذف یکی از مجهولها مثلاً x میتوان ضریب x را در دو همچندی اول و دوم و بعد در دو همچندی اول و سوم مساوی نمود بدینطریق که یکدفعه دو طرف همچندی اول را در ۳ ویکدفعه در ۲ ضرب نموده و همچندیهای دوم و سوم را بترتیب از آنها کم کنیم دو همچندی حاصل تشکیل یکدستگاه دو مجهولی برحسب y و z میدهند

حذف x در دو همچندی اول و دوم:

$$\begin{cases} 3x - 6y + 3z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\underline{\quad - \quad + \quad + \quad - \quad}$$

$$-3y + 5z = -1$$

حذف x در دو همچندی اوّل و سوم:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$\underline{\quad - \quad - \quad + \quad - \quad}$$

$$-5y + 7z = -3$$

دستگاه دو مجهولی برحسب y و z

$$(2) \qquad \begin{cases} -3y + 5z = -1 \\ -5y + 7z = -3 \end{cases}$$

که از حلِ این دستگاه y و z و از روی آنها x بدست میآید:

$y = 2$ و $z = 1$ و $x = 3$

۷۷- تبصره - اگر در مثال سوم x را بین دو همچندی دوّم و سوّم حذف کنیم به همچندی دو مجهولی $9y - 11z = 7$ (۳) میرسیم و جواب دستگاه (۲) یعنی $y = 2$ و $z = 1$ درین همچندی نیز صدق میکند از اینجا معلوم میشود که همچندی (۳) را میتوان از دو همچندی دستگاه (۲) بدست آورد چنانکه اگر همچندی اوّل دستگاه (۲) را در ۲ و همچندی دوّم را در ۳- ضرب نموده دو همچندی را جمع کنیم همچندی (۳) بدست میآید پس معلوم میشود این همچندی زیادی است

یعنی با داشتن دستگاه (۲) حذف کردن x در دو همچندی دوّم و سوّم لزومی ندارد بطور کلّی اگر یک مجهول را در دو همچندی A و B و همچنین همان مجهول را در دو همچندی A و C حذف کردیم دیگر لازم نیست آن مجهول را در دو همچندی B و C حذف نمائیم:

برای اینکه همچندی زیادی پیدا نشود برای حذف یک مجهول بهتر این است که یکی از همچندیهای دستگاه را در نظر گرفته ضریب آن مجهول را در آن همچندی و یک یک همچندیهای دیگر مساوی نمائیم (چنانکه ما در دستگاه مثال ۳ همچندی اوّل را بترتیب با همچندی دوّم و بعد با همچندی سوّم در نظر گرفتیم)

تمرین

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 7x + 9z = 29 \\ y + 8z = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2z = 11 \\ 3y + 4z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x - 2z = 4 \\ 5x = 4z \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.3x - 1.9y = 1 \\ 1.7x - 1.1z = 2 \\ 2.9y - 2.1z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ y=0/7x-4 \\ z=0/3x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=36 \\ 4x=3y \\ 2x=3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+4y+8z=13 \\ 3x+9y+27z=34 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=9 \\ x+2y+4z=15 \\ x+3y+9z=23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+11y+z=a \\ 7y+11z+x=b \\ 7z+11x+y=c \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x-y+3z=a \\ 5y-z+3x=b \\ 5z-x+3y=c \end{cases}$$

(از جمع همچندیهای هر یک از دو دستگاه آخر راه آسانتری برای حذف یک مجهول بدست میآید)

$$\begin{cases} 0/2x+0/3y+0/4z=29 \\ 0/3x+0/4y+0/5z=38 \\ 0/4x+0/5y+0/6z=51 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=20/5 \\ 2x-y+3z=26/5 \\ x+y+10z=55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+5z=17 \\ 6x-3y+15z=51 \\ \frac{4x}{5}-\frac{2y}{5}+2z=\frac{34}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1\frac{1}{2}z+8 \\ x+z=2\frac{2}{3}y-14 \\ y+z=3\frac{3}{4}x-32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-3y-z-4=\frac{z}{3}-2y-\frac{4z}{3}-y \\ x+y-\frac{1}{3}=3x-\frac{y}{2}+z \\ x-3y+4z=3z-2+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{z+1}=2 \\ \frac{3y+z}{x+1}=2 \\ \frac{2z+x}{y+1}=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+1}{y+1}=2 \\ \frac{y+2}{z+1}=4 \\ \frac{z+3}{x+1}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{y+z}=2 \\ \frac{y+3}{x+z}=1 \\ \frac{z+3}{x+y}=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{y-z}=10 \\ \frac{x+z}{z+y}=3 \\ \frac{y+z}{z-x}=\frac{-3}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(2y+1)=(2x+7)y \\ (x-2)(3z+1)=(x+3)(3z-1) \\ (y+1)(z+2)=(y+3)(z+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-1)(y+1)=2(x+1)(y-1) \\ (x+4)(z+1)=(x+2)(z+2) \\ (y-2)(z+3)=(y-1)(z+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = a + b \\ \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{2b} \\ \dfrac{x}{y-z} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{a-b} \end{cases}$$

۷۸- قاعدهٔ کلی برای حل یک دستگاه n همچندی n مجهولی درجهٔ اول - نخست هریک از همچندیهای دستگاه را ساده میکنیم پس از آن مانند حل یک دستگاه سه همچندی سه مجهولی درجهٔ اول یکی از مجهولها را حذف می کنیم تا دستگاهی بدست آید دارای $n-1$ همچندی و $n-1$ مجهول. درین دستگاه نیز یکی از مجهولها را حذف میکنیم باین طریق باز یک همچندی و یک مجهول آن کم میشود و این کار را آنقدر تکرار می کنیم تا بالاخره بیک همچندی یک مجهولی برسیم از حل این همچندی آن مجهول پیدا میشود چون آنرا دریکی از دو همچندی دومجهولی آخرین دستگاه ببریم مجهول دیگر پیدا میشود و از روی این دو مجهول مجهول دیگر حساب میشود تا آخر.

مثال- دستگاه چهار همچندی چهار مجهولی زیر را حل کنید:

$$(1)\quad \begin{cases} x + y + z + u = 24 \\ x + 2y + 2z - 9u = 0 \\ 3x - y - 5z + u = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 5u = 0 \end{cases}$$

حل- چون x را درین دستگاه حذف کنیم (آسانتر مساوی کردن ضریبها است با رعایت تبصره ۷۷) باین ترتیب که یک همچندی دستگاه مثلاً همچندی اول را درنظر گرفته و با یک یک همچندی های دیگر ضریب x را مساوی میکنیم از حذف x

$$(2)\quad \begin{cases} -y - 2z + 10u = 24 & \text{در دو همچندی اول و دوم همچندی} \\ 4y + 8z + 2u = 72 & \text{〃 〃 سوم 〃} \\ -y + 6z + 7u = 48 & \text{〃 〃 چهارم 〃} \end{cases}$$

بدست میآید این سه همچندی تشکیل یک دستگاه سه مجهولی (۲) را میدهد و چون درین دستگاه مجهول y را حذف کنیم دستگاه دو مجهولی (۳) بدست میآید

$$(3)\quad \begin{cases} 8z - 3u = 24 \\ 42u = 168 \end{cases}$$

از دستگاه (۳) نخست u و پس از آن z حساب میشود $u = 4$ و $z = 4{,}5$ که چون آنها را دریکی از همچندیهای دستگاه (۲) ببریم $y = 7$ بدست میآید. و از روی یکی از همچندیهای دستگاه (۱) x حساب میشود:

$$x = 8{,}5$$

تمرین

دستگاههای چند مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ y+3z-u=4 \\ z+3u-x=11 \\ u+3x-y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=5 \\ y+2z=8 \\ z+2u=11 \\ u+2x=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z+5u=11 \\ z+x+4u=11 \\ x+y+3u=11 \\ x+z+8y=33 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y+z=20 \\ x+4y+3u=30 \\ 6x+z+3u=40 \\ 8y+3z+5u=50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+u=144 \\ x+2y+2z+2u=267 \\ x+2y+3z+3u=259 \\ x+2y+3z+4u=410 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=au \\ x+z=bu \\ x+y=cu \\ \dfrac{1-x}{1-y}=\dfrac{a}{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}-\dfrac{z}{3}=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{u}{9}=1 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{3z}{5}-\dfrac{u}{2}=1 \\ \dfrac{3y}{4}-\dfrac{z}{5}-\dfrac{u}{3}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=12 \\ y+2z-u=10 \\ z+2u-v=8 \\ u+2v-x=1 \\ v+2x-y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 2y+z+u=5 \\ 2z+u+v=7 \\ 2u+v+x=14 \\ 2v+x+y=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+u+v=15 \\ x+2y+4z+8u+16v=57 \\ x+3y+9z+27u+81v=159 \\ x+4y+16z+64u+256v=453 \\ x+5y+25z+125u+625v=975 \end{cases}$$

۷۹- **تبصره** - قاعدهٔ حلّ یک دستگاه n مجهولی قاعده‌ایست کلّی ولی در بعضی دستگاهها براه آسانتری میتوان بجواب رسید.

مثال ۱- دستگاه سه مجهولی زیر را حل کنید

$$(1) \qquad \begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}$$

میتوان برای حل دستگاه قاعدهٔ کلی را بکار برد ولی درین مثال می بینیم که اگر سه همچندی را با هم جمع کنیم خواهیم داشت :

$$2(x+y+z)=a+b+c$$

و یا

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2} \qquad (2)$$

حال اگر هریک از همچندی های دستگاه (۱) را از همچندی (۲) کم کنیم مجهول ها بدست میآید از کاستن همچندی اول از همچندی (۲) z پیدا میشود

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}$$

از کاستن همچندی دوم از همچندی (۲)

$$x=\frac{a+c-b}{2}$$

« سوم «

$$y=\frac{a+b-c}{2}$$

مثال ۲- این دستگاه را حل کنید :

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=u \\ x+y+z+u=11 \end{cases}$$

بروفق (تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶) میتوان چنین نوشت

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=u=\frac{x+y+z+u}{2+3+5+1}$$

و چون بجای $u+z+y+x$ مساویش ۱۱ را گذاریم خواهیم داشت

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=u=1$$

ازین تساوی هر چهار مجهول بدست میآید :

$$x=2 \quad و \quad y=3 \quad و \quad z=5 \quad و \quad u=1$$

همینطور میتوان بخصوص یکدستگاه دو همچندی دو مجهولی را که در یکی از دو همچندی آن جمله ثابت صفر باشد حل نمود

مثلاً برای حل دستگاه

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$$

همچندی دوم را میتوان چنین نوشت

$$\frac{x}{b'}=\frac{y}{-a'}$$

و با مراجعه به تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶

$$\frac{x}{b'}=\frac{y}{-a'}=\frac{ax+by}{ab'-ba'}$$

و چون بجای $ax+by$ مساویش c را گذاریم خواهیم داشت :

$$\frac{x}{b'}=\frac{y}{-a'}=\frac{c}{ab'-ba'}$$

که از آن

$$x=\frac{cb'}{ab'-ba'} \quad و \quad y=\frac{-ca'}{ab'-ba'}$$

مثال ۳- دستگاه زیر را حل کنید:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{x+y}-\frac{2}{x-z}=0 \\ \frac{2}{x+y}+\frac{1}{y-z}=1 \\ \frac{2}{y-z}+\frac{3}{x-z}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون برخه نامها را از میان ببریم دستگاهی از درجهٔ دوّم پیدا میشود تا اگر $\frac{1}{x+y}$ را به مجهول t و $\frac{1}{x-z}$ را به مجهول v و $\frac{1}{y-z}$ را به مجهول u بنمائیم یعنی

$$(۲)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = t \\ \dfrac{1}{x-y} = v \\ \dfrac{1}{y-z} = u \end{cases}$$

دستگاه (۱) چنین میشود

$$\begin{cases} t - 2v = 0 \\ 2t + u = 1 \\ 2u + 2v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

که دستگاهی است سه مجهولی برحسب t و v و u از حلّ این دستگاه

$t = 1$ و $v = \frac{1}{2}$ و $u = -1$

بنابراین دستگاه (۲) چنین میشود

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 1 \\ \dfrac{1}{x-z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y-z} = -1 \end{cases}$$

ویا

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

که از حلّ آن خواهیم داشت $x = 2$ و $y = -1$ و $z = 0$

تمرین

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x + z = 25 \\ y + z = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z - x = a \\ z + x - y = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{z} = 4 \\ \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 99 \\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{3} = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{4y - 3x} = 20 \\ \dfrac{xz}{2x - 3z} = 15 \\ \dfrac{yz}{4y - 5z} = 12 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \frac{xy}{x+y} &= \frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x+z} &= \frac{1}{6} \\ \frac{yz}{y+z} &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

راهنمائی - هریک از همچندیهای دستگاه بالا مثلاً $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$ را میتوان وارونه

نموده چنین نوشت $\frac{x+y}{xy}=5$ ویا $\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=5$ ویا $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=5$

$$\begin{cases} 8x^3=125y^3=27z^3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{x}-3y=\frac{1}{20} \\ 2\sqrt[3]{z}-3\sqrt{x}=\frac{1}{15} \\ 4\sqrt[3]{z}-5y=\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(5y-3)=(2x+1)(2y-3) \\ (4x-1)(z+1)=(x+1)(2z-1) \\ (y+2)(z+2)=(3y-6)(3z-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz=a(y+z) \\ xz=b(x+z) \\ xy=c(x+y) \end{cases} \qquad \sqrt{\frac{yz}{x}}=a \quad \sqrt{\frac{xz}{y}}=b \quad \sqrt{\frac{xy}{z}}=c$$

$$\frac{x-a}{b+c}=\frac{y-b}{a+c}=\frac{z-c}{a+b}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$$

۸۰ - حلّ دستگاه سه همچندی دو مجهولی - دو همچندی آن دستگاه تشکیل دستگاهی میدهد که جوابش را میتوان بدست آورد حال اگر این جواب در همچندی سوم هم صدق کند جواب دستگاه سه همچندیست وگرنه این دستگاه سه همچندی جواب ندارد

مثال - دستگاه سه همچندی دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+3y=9 \\ x+5y=7 \\ 2x-5y=-4 \end{cases} \qquad (1)$$

از حلّ دو همچندی اوّل دستگاه خواهیم داشت $x=3$ و $y=2$

می بینیم که این دو عدد در همچندی سوم دستگاه صدق میکند:

$$2\times3-5\times2=6-10=-4$$

بنابراین جواب دستگاه (۱) است

ولی اگر همچندی سوم دستگاه (۱) چنین بود:

$$2x-5y=1$$

دستگاه بدون جواب میشد زیرا $2\times3-5\times2$ مساوی با یک نیست

تمرین - تحقیق کنید که هر یک از سه همچندی دستگاه (۱) را میتوان از دو همچندی دیگر بدست آورد (به شمارهٔ ۷۷ مراجعه شود)

۸۱ - نتیجه - از آنچه در بالا گفته شد چنین برمیآید که هر وقت یکدستگاه سه همچندی دو مجهولی دارای جواب باشد هر یک از سه همچندی دستگاه را میتوان از همچندیهای دیگر بدست آورد.

همین مطلب را دربارهٔ هر دستگاهی که شمارهٔ همچندیهایش بیش از شمارهٔ مجهولهایش

باشد میتوان ادا کرد

۸۲- حلِّ دو همچندی سه مجهولی - چون در دو همچندی دستگاه یکی از سه مجهول را حذف کنیم یک همچندی دو مجهولی بدست میآید و چنانکه میدانیم این همچندی جوابهای بسیار دارد و بنابراین دستگاه مبهم است و همینطور است هر دستگاهی که در آن شمارهٔ همچندیها کمتر از شمارهٔ مجهولها باشد

مثال - دستگاه

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

را حل کنید

از حذف مجهول y این همچندی بدست میآید $3x - z = 4$ که یک همچندی دو مجهولیست و جوابهای بسیار دارد چنانکه اگر z را مساوی 2 اختیار کنیم x مساوی ۲ میشود و از آنجا y مساوی ۳ میگردد و اگر z را ۵ بگیریم x برابر ۳ میشود و از روی آن y برابر ۱۲ میگردد و غیره

تمرین

۱- این دستگاهها را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x = 2y - 1 \\ x + y - z = 1 + v \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + y = 5 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y + 2z = 5 \\ 15x - 35y - 2 = 10z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2y - x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = z - 5 \\ 2x - z = 2y - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 5y + z = -3 \\ -x + 3y + 5z = 4 \\ 3x - 8y - 4z = 11 \end{cases}$$

۲- در دستگاه

$$\begin{cases} 3x - 2\lambda y + 2z = 12 \\ \lambda x + 5x - 3z = -15 \\ 2x + 3y - 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

اولاً λ را چنان تعیین کنید که دستگاه دارای یک جواب باشد ثانیاً بازاء چه مقدار λ دستگاه مبهم میشود؟

۳- بجای λ عددی بگذارید تا این دستگاه مبهم شود

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - y = 0 \\ 2\lambda x + 3y - 7z = 0 \\ (\lambda + 2)x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

۴- بجای m چه عددهائی بگذاریم تا دستگاه

$$\begin{cases} x + y = m \\ \alpha x + \beta y = m^2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y = m^3 \end{cases}$$

دارای یک جواب مُعیّن باشد

۵- ثابت کنید که یکی از همچندیهای دستگاه

$$\begin{cases} ay + bx = ab \\ ax + by = (a-b)^2 \\ a^2 y + b^2 x = 2a^2 b^2 \end{cases}$$

را میتوان از دو همچندی دیگر بدست آورد

ب- حَلّ مسئله های فکری چند مجهولی

۸۳- همان طور که در شمارهٔ (۵۰) راجع بحَلِّ مسئله های فکری یک مجهولی گفتیم:

نخست باید صورت مسئله را با دقت خواند و مجهولهای مسئله را انتخاب کرد.

دوّم از روی مسئله رابطه هائی را که باید بین مجهولها و معلومها باشد مینویسیم این رابطه ها را همچندی های مسئله گویند که دستگاه چند مجهولی را تشکیل میدهند

سوّم باید این دستگاه را حل نمود یعنی جواب آن را بدست آورد.

چهارم باید دید آیا جواب دستگاه جواب مسئله هست یا نیست.

۸۴- تبصره- هرگاه دستگاه از درجهٔ اوّل باشد مسئله را از درجهٔ اوّل گویند. ما در اینجا فقط بحلّ مسئله های فکری درجهٔ اوّل میپردازیم.

مسئلهٔ ۱- مجموع دو عدد x و y برابر s است و تفاضل آنها یعنی $x - y$ برابر d است آن دو عدد را بدست آورید.

حل- این مسئله دارای دو مجهول است که در خود مسئله به x و y نموده شده اند از روی مسئله بین آنها و معلومها این رابطه برقرار است:

$$\begin{cases} x + y = s \\ y - x = d \end{cases}$$

که دستگاهی است دو مجهولی چون آنرا حل کنیم جواب دستگاه چنین است

$x = \frac{s - d}{2}$ و $y = \frac{s + d}{2}$ (مراجعه بشمارهٔ ... مسئلهٔ ۱ کتاب اوّل). در اینجا چون مجهولها دو عددند و هر مقداری میتوانند بگیرند پس مسئله جواب دارد هرچه باشد s و d

مسئلهٔ ۲- فاصله A و B بیست و یک کیلومتر است دوچرخه سواری از نقطهٔ A و پیاده ای از B در یک لحظه حرکت مینمایند اگر بطرف هم آیند پس از ۳۵ دقیقه

واگر در یک جهت حرکت کنند بطوریکه دوچرخه سوار A بدنبال پیاده باشد پس از ۶۳ دقیقه بهم میرسند معلوم کنید تندی هریک را.

حل - تندی دوچرخه سوار را x کیلومتر در دقیقه و تندی پیاده را y کیلومتر در دقیقه میگیریم پس از ۳۵ دقیقه راهی که هریک پیموده بترتیب $۳۵x$ و $۳۵y$ میشود و از روی مسئله این همچندی بدست میآید:

$$۳۵x + ۳۵y = ۲۱ \qquad (۱)$$

و همچنین راهیکه هریک از آنان در مدت ۶۳ دقیقه پیموده اند بترتیب $۶۳x$ و $۶۳y$ میشود و باز از روی مسئله این همچندی حاصل میگردد:

$$۶۳x - ۶۳y = ۲۱ \qquad (۲)$$

این دو همچندی پس از ساده کردن تشکیل دستگاه زیر را میدهند:

$$x + y = \frac{۳}{۵}$$

$$x - y = \frac{۱}{۳}$$

که جواب آن اینست $x = \frac{۷}{۱۵}$ کیلومتر و $y = \frac{۲}{۱۵}$ کیلومتر (ممکن است جواب این دستگاه را از روی دستورهای مسئلهٔ پیش بدست آورد)

جواب این مسئله که تندیهای این دو متحرّک باشد باید عددهای مثبتی باشند و چون جواب دستگاه عددهای مثبت است بنابراین همین عددها جواب مسئله میباشند

۸۵ - تبصره - همین مسئله را بایک مجهولی حل کردیم (صفحه ۸۹) باین طریق که تندی پیاده را برحسب x یعنی تندی دوچرخه سوار بدست آوردیم و مساوی ($x - \frac{۳}{۵}$) کیلومتر شد در اینجا هم می‌بینیم که برای حذف کردن y اگر y را برحسب x (تندی دوچرخه سوار) از همچندی اوّل دستگاه پیدا کنیم همین میشود پس درحقیقت همین عمل حذف کردن را ما در پیش در ذهن خود انجام داده ایم. از مقایسهٔ حلّ مسئله براه دو مجهولی با راه یک مجهولی می‌بینیم که براه دو مجهولی خیلی زودتر و آسانتر بجواب رسیدیم و این آسانی برای این بوده است که مجهول دیگر را بحرف y نمایش و بجای عملهای فکری عملهای نوشتنی انجام دادیم.

مسئلهٔ ۳ - سه آمیزه از طلا و مس بعیارهای ۰٫۸۰۰ و ۰٫۷۲۰ و ۰٫۴۵۰ داریم اگر آمیزهٔ اوّلی را با سوّمی بیامیزیم آمیزهٔ حاصل عیارش ۰٫۶۹۵ شود و اگر آمیزهٔ دوّم و سوّم را با ۶۰ گرم طلای ویژه بیامیزند آمیزهٔ حاصل بعیار ۰٫۶۰۰ شود و اگر هرسه را باهم ممزوج نمایند آمیزه ای حاصل شود بعیار ۰٫۷ تعیین کنید وزن هریک را.

حل - چون وزن این سه شمش را بترتیب x و y و z گرم فرض کنیم طلای ویژه شمش اوّل $۰٫۸x$ گرم و طلای ویژه شمش سوّم $۰٫۴۵z$ گرم میشود چون این دو شمش را باهم ممزوج کنیم از طرفی طلای ویژه اش ($۰٫۸x + ۰٫۴۵z$)

گرم است و از طرفی وزن این ممزوج ($x + z$) گرم و عیارش ۶۹۵ر۰ است پس طلای ویژه اش ۶۹۵ر۰ ($x + z$) گرم میباشد پس این همچندی بدست میآید .

$$0.8x + 0.45z = 0.695(x + z)$$

بهمین ترتیب از دو قسمت دیگر فرض مسئله این دو همچندی نتیجه میشود .

$$0.72y + 0.45z + 60 = (x + y + 60)\,0.6$$

$$0.8x + 0.72y + 0.45z = (x + y + z)\,0.7$$

این همچندیها پس از ساده شدن تشکیل این دستگاه رامیدهند :

$$\begin{cases} 3x = 7z \\ 4y - 5z = -800 \\ 10x + 2y = 25z \end{cases}$$

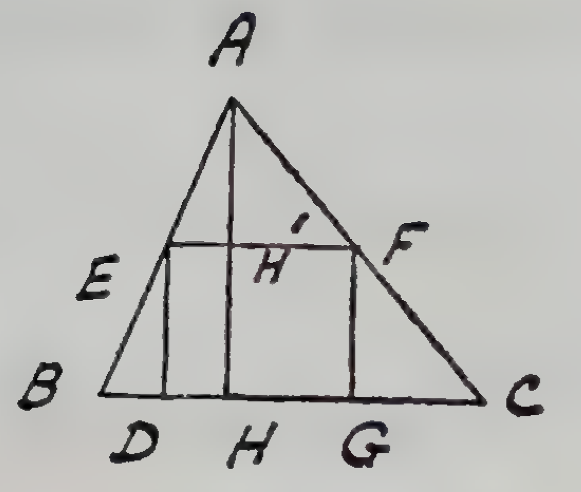
چون این دستگاه را حل کنیم وزن هر شمش بدست میآید از ین قرار :

$x = 120$ گرم و $y = 400$ گرم و $z = 480$ گرم

مسئله ۴- درسه گوشه ای بقاعدهٔ a وبلندی h راست گوشه ای محاط کنید که تشابه باراست گوشه ای بدرازای l و پهنای d باشد

حل- چون درازای راست گوشهٔ محاطی DEFG را x و پهنای آن را

y بگیریم از تشابه دو سه گوشهٔ ABC و AEF خواهیم داشت



$\frac{EF}{BC} = \frac{AH'}{AH}$ وبفرض

$EF = x$ و $DE = y$ نتیجه میشود

$\frac{x}{a} = \frac{h - y}{h}$ چون این راست گوشه متشابه باراست گوشه ایست بدرازای l و پهنای d پس این همچندی بدست میآید :

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{d}$$

این دو همچندی تشکیل دستگاه دو مجهولی زیر رامیدهند :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{h - y}{h} \\ \frac{x}{l} = \frac{y}{d} \end{cases}$$

از حلِّ این دستگاه x و y بدست می آید بدینطریق :

چون دو همچندی دستگاه را برهم تقسیم کنیم x از بین میرود و همچندی یک مجهولی زیر برحسب y بدست میآید :

$\frac{l}{a} = \frac{d(h - y)}{hy}$ که از حلِّ آن y بدست میآید

و از روی آن x پیدا میشود

$$y = \frac{adh}{ad + lh}$$

$$x = \frac{alh}{ad + lh}$$

تبصره - در حل این مسئله درازای است گوشهٔ محاطی را موازی قاعدهٔ AB گرفتیم اگر درازای آنرا موازی ارتفاع سه گوشه بگیریم درینصورت فقط در هم‌چندی اول دستگاه باید جای x و y را باهم عوض نمود .

بحث - درهرصورت برای اینکه جوابهای دستگاه در مسئله صدق کند باید هریک مثبت باشند واگر درازا موازی قاعدهٔ AB است باید کوچکتر از a باشد درینحال پهنای است گوشه نیز باید کوچکتر از h باشد . ازمقایسهٔ درازا با a و پهنا با h معلوم میشود که این شرطها برقراراست بنا براین جوابهای دستگاه جوابهای مسئله میباشد .

تمرین

۱- مسئله های چندمجهولی راکه درصفحه های از ۹۲ تا ۱۰۷ نوشته شده دوباره حل کنید (ازراه چندمجهولی)

۲- درقلک بچه ای ازده شاهی و ده دیناری و ۵ دیناری پانزده ریال و یازده شاهی جمع شده بود شمارهٔ پنج دیناری ها ۶ دانه ازشمارهٔ ده شاهی ها کمتر بود و شمارهٔ ده دیناریها یکی زیادتر از دوبرابر ده شاهی ها بود . ازهرقسم چند دانه درقلک بوده است ؟

۳- آیا میشود راست گوشه ای رسم کرد که دوره اش ۲۵۲ سانتیمتر و درازایش ۱۵ سانتیمتراز دوبرابر پهنایش زیادتر باشد ؟ اگرمیشود درازا و پهنای آن چقدر است ؟

۴- سرمایهٔ شخصی ۵۰٬۰۰۰ ریال است که پاره ای ازآن رابقرار ۴٪ و پارهٔ دیگررا ازقرار ۶٪ به منفعت داده وروی هم ۲۸۰۰ ریال دریکسال سود میبرد - هریک از دو پاره چند بوده ؟

۵- شخصی ۱۵۰۰۰ ریال دارد قسمتی ازین پول راازقرار ۴٪ و باقی راازقرار ۵٪ به بهره کاری میدهد - سود قسمت اول دو برابر سود قسمت دوم است هریک ازین دو قسمت چنداست ؟

۶- هرگاه پیکرهای (رقمهای) یک عدد دو پیکری رابرخود آن بیفزائیم ۱۵ میشود و هرگاه آنرا ازعدد بکاهیم ۹ میشود آنعدد کدام است ؟

این مسئله را بدوراه حل کنید یکی اینکه خود عدد و مجموع پیکرهایش را مجهول بگیرید و یکی اینکه دو پیکر آنرا مجهول بگیرید .

۷- اگرهوشنگ ۵۰ ریال به پژن بدهد پژن چهاربرابر هوشنگ خواهد داشت پس از آن اگر پژن ۱۰۰ ریال به هوشنگ دهد فقط دو برابر او خواهد داشت - پیش از داد و ستد هریک چند دارند ؟

۸- دونفر اگر باهم کارکنند کاری را چهار روزه انجام میدهند ولی پس ازاینکه $1\frac{1}{2}$ روز باهم کارکردند اولی کار را رها میکند و دومی به تنهائی دنبال کار را گرفته $7\frac{1}{2}$ روز دیگر آنرا انجام میدهد هریک ازین دو نفر به تنهائی تمام کار را چند روزه انجام خواهند کرد ؟

۹- شخصی یکبار ۱۱ متر پارچهٔ ابریشمی و ۷ متر ماهوت خرید به ۱۱۴۰ ریال بار دوم ۹ متر پارچه ابریشمی و ۱۳ متر ماهوت خرید به ۱۶۶۰ ریال مطلوبست قیمت متر هریک.

۱۰- چه برخه ایست که اگر بر برخه نام و برخه شمار آن $\frac{1}{2}$ بیفزائیم برابر $\frac{4}{9}$ و هرگاه از آنها $\frac{1}{2}$ بکاهیم برابر $\frac{2}{5}$ گردد؟

۱۱- دو عدد بدست آورید چنانکه در تقسیم آنها بر یکدیگر بهر ۷ و مانده ۵ باشد و در تقسیم سه برابر بزرگتر بر دو برابر کوچکتر بهر ۱۱ و مانده ۶ شود.

۱۲- کدام دو عددند که تفاضل و حاصل ضرب و بهر آنها (نسبت آنها) یکی است؟

۱۳- دوچرخه سواری پیش خود حساب میکرد که اگر هر ساعت ۶ کیلومتر تندتر میرفت دو ساعت زودتر رسیده بود و اگر هر ساعت ۶ کیلومتر کندتر میرفت سه ساعت دیرتر رسیده بود درازی راهیکه پیموده بوده و تندی وی چه بوده است؟

۱۴- فریدون به هوشنگ گفت اگر ده ریال بمن بدهی دو برابر تو خواهم داشت هوشنگ جواب داد که تو پنج ریال بمن بده تا هر دو یک اندازه داشته باشیم - هرکدام چند دارند؟

۱۵- شخصی به برادرش میگفت وقتی من بسن تو بودم دو برابر سال تو را داشتم و وقتی تو بسن من برسی روی هم ۶۳ سال خواهیم داشت هریک چند سال دارند؟

۱۶- دو نفر که تفاوت مزد روزانهٔ آنها $\frac{1}{3}$ مزد اولی است باهم کار میکنند پس از مدتی اولی که پنج روز زیادتر از دومی کار کرده صد ریال مزد گرفته و دومی ۶۰ ریال. مزد روزانهٔ هریک چند است؟

۱۷- دو ظرف هریک مقداری شیر دارد اگر از ظرف اول که شیرش بیشتر است بقدر شیر ظرف دوم برداشته در دومی بریزیم و دوباره از دومی بقدری که در اولی مانده در اولی بریزیم و بار سوم از ظرف اول بقدر آنچه در ظرف دوم مانده برداشته در دومی بریزیم هریک از دو ظرف ۶ لیتر شیر خواهد داشت - در هریک از دو ظرف چند لیتر شیر بوده است؟

۱۸- سود سرمایه ای پس از ۸ $\frac{1}{2}$ ماه ۲۸۰ ریال است اگر ۶۰۰ ریال بر سرمایه بیفزائیم و بر نرخ نیز پنج یک آن افزوده شود سود سه ماهه ۱۳۲٫۳ ریال خواهد شد - سرمایه و نرخ چیست؟

۱۹- سود سالیانهٔ دو سرمایه که نرخ آنها بترتیب ۴٫۵٪ و ۵٫۵٪ است روی هم ۳۰۳۵ ریال میشود ولی اگر بترتیب نرخها عوض شود سود آنها ۳۰۱۸ ریال خواهد بود - هریک از دو سرمایه چند است؟

۲۰- سود سه سرمایه با نرخهای مساوی اولی پس از سه ماه دومی پس از چهار ماه سومی پس از ۶ ماه یکی است هریک از سه سرمایه را معلوم کنید درصورتیکه روی هم ۲۷۶۲۰۰ ریال باشد.

۲۱- مبلغ اسمی دو برات به نسبت ۳ و ۴ بوده تفاوت میان مبلغ فعلی آنها بوعدهٔ ۱۲۶ روز و نرخ ۶٪ (برای اولی) و ۵٪ (برای دومی) ۴۸۰ ریال است مبلغ اسمی هریک چند است؟

۲۲- مبلغ فعلی دو برات به نسبت ۳ و ۴ است معین کنید مبلغ اسمی آن دو را درصورتیکه اگر نرخ هر دو از قرار ۵٪ و موعد اولی ۱۲۰ روز و از دومی ۸۰ روز باشد روی هم دو تنزیل

۲۵۱٫۵ ریال میشود.

۲۳- سود دو سرمایه با نرخهای مساوی پس از ۶ سال بترتیب ۱۷۲۸ ریال و ۱۰۰۸ ریال است بدست آورید سرمایه و نرخ را درصورتیکه سرمایه ها روی هم ۲۵۰۰۰ ریال باشد.

۲۴- تنزیل خارجی براتی از قرار ۵٪ ۲۰۲٫۵ ریال و تنزیل داخلی همان برات از قرار همان نرخ ۲۰۰ ریال است مدت و مبلغ اسمی برات چقدر است؟

۲۵- زمینی است بشکل ذوزنقه که هر هکتار آن ۲۰۰۰ ریال ارزش دارد قیمت زمین با سود آن پس از پنجاه از قرار ۴٪ ۱۳۰۸٫۳۵ ریال است. درازای ارتفاع و دو قاعدهٔ ذوزنقه را حساب کنید درصورتیکه بدانیم قاعدهٔ کوتاه $\frac{۴}{۷}$ قاعدهٔ بلند است و اگر بر قاعدهٔ کوتاه ۲۰ متر افزوده شود و از قاعدهٔ بلند ۱۲ متر کم شود بر سطح ذوزنقه ۲۰۸ متر مربع افزوده خواهد شد.

۲۶- دو شمش بیک وزن داریم اگر اوّلی را با نصف دوّمی بیامیزیم عیار حاصل $\frac{۲۳}{۳۰}$ و چون نصف اوّلی را با پنج یک دومی بیامیزیم عیار آمیزه $\frac{۲۷}{۳۵}$ شود عیار هر یک از دو شمش چند است؟

۲۷- دو شمش بعیارهای بر₁ و بر₂ داریم بچه نسبت این دو را باهم بیامیزیم تا وزن شمش حاصل a گرم و عیارش بر شود؟

۲۸- دو شمش است بعیارهای ۷ره و ۸ره که نسبت میان وزنهای آنها $\frac{۳}{۷}$ است هرگاه این دو شمش را با شمش سوّمی که بعیار ۸۸ره و وزن ۱۰۰ گرم است بیامیزیم عیار حاصل ۸۲ره شود. وزن هریک از دو شمش چقدر است؟

۲۹- دو شمش است بیک وزن اگر اوّلی را با چهار یک دوّمی بیامیزیم عیار آمیزهٔ حاصل ۹۳ره میشود و اگر اوّلی را با نصف دوّمی بیامیزیم عیار آمیزهٔ حاصل ۹۲ره میشود عیار هر یک از دو شمش چقدر است؟

۳۰- سه شمش است بعیارهای ۹۵ره و ۷ره و ۹۲ره ۲٫۱ کیلو از شمش اوّل را با چقدر از هر یک از دو شمش دوّم بیامیزیم تا شمشی بوزن ۳٫۲۴ کیلو و عیار ۹ره بدست آید؟

۳۱- آمیزه ایست از طلا و مس بوزن ۱۴٫۷ کیلو که چون در آب وزن شود وزنش ۱۳٫۸۵ کیلو است و اگر در مایع دیگر وزن نمایند از وزنش ۶۸ره کیلو کاسته میشود تعیین کنید وزن طلا و مس و وزن مخصوص مایع را درصورتیکه وزن مخصوص طلا ۱۹٫۶ و وزن مخصوص مس ۸٫۴ باشد.

۳۲- سه نفر هریک پولی دارند اگر اوّلی $\frac{۱}{۷}$ و سوّمی $\frac{۱}{۱۳}$ پولشانرا بدوّمی بدهند پول هر سه یکی میشود. پول هریک چند است درصورتیکه میدانیم بر روی هم ۳۶۰ ریال دارند؟

۳۳- مجموع سه عدد ۴۵ است و عدد اوّل برابر تفاضل عدد سوّم از دوّم است و مجموع عدد اوّل و دوم ۲۸ است آن سه عدد کدامند؟ (این مسئله جواب ندارد)

۳۴- برای حوضی سه راه آبست A و B و C اگر A و B باهم باز باشند حوض دریکساعت و ده دقیقه پر میشود اگر A و C باهم باز باشند حوض دریکساعت و ۲۴ دقیقه پر میشود و اگر B و C باهم باز باشند در دو ساعت و ۲۰ دقیقه پر میشود. با هریک از سه راه آب حوض چند وقته پر میشود؟

۳۵- سه شمش آمیخته از طلا و نقره و مس داریم بدین ترتیب :

شمش اوّل	۱۵ گرم طلا	و	۲۷ گرم نقره	و	۴۰ گرم مس دارد
شمش دوّم	۵۰ « «	و	۵۲ « «	و	۷۵ « «
شمش سوّم	۳۱ « «	و	۴۸ « «	و	۲۶ « «

از هر یک چندگرم برداشته باهم بیامیزیم تا شمش حاصل ۲۰ گرم طلا ۴۳ گرم نقره و ۵۴ گرم مس داشته باشد.

۳۶- پهنهٔ سه گوشهٔ قائم الزاویهٔ ۱۵۰ متر مربّع و وترش ۲۵ متر است دو پهلوی دیگرش را حساب کنید.

۳۷- نسبت درازای پهلوها‌ی یک سه گوشهٔ قائم الزّاویه بیکدیگر مانند عددهای ۳ و ۴ و ۵ میباشد و پهنه اش ۲۴ متر مربّع است پهلوهایش را حساب کنید.

۳۸- از سه گوشهٔ ABC پهلوی $a = BC$ و ارتفاع $h = AH$ داده شده خطّی موازی BC چنان بکشید که پهنهٔ ذوزنقهٔ حاصل $\frac{2}{5}$ پهنهٔ سه گوشه گردد.

۳۹- راست گوشه ای پیدا کنید بقسمیکه چون دو متر بر پهنایش بیفزائیم و ۲٫۵ از درازایش بکاهیم پهنه اش تغییر نکند ولی اگر دو متر بر درازایش افزوده شود و ۲٫۵ متر از پهنایش کاسته گردد از پهنه اش ۴۵ متر مربّع کم شود.

۴۰- دو دایره به شعاعهای R و R' و خطّ دو مرکز d داده شده نقطه هائی بدست

آورید که درازی مماسهای وارد از آن نقطه ها بر دو دایره یکی باشد.

*۴۰- کره ایست بشعاع R بچه فاصله از سطح کره دور شویم تا اینکه مساحتی را که می بینیم S باشد (مساحت سطح منطقه برابر است با حاصل ضرب محیط دائرهٔ عظیمه در ارتفاع منطقه)

فصل پنجم

مختصات نقطه و نمودار

۸۶- چنانکه میدانیم هر چندی (کمیت) قابل افزایش و کاست است بنابراین چندیها تغییرپذیرند مانند زمان که در تغییر است و همچنین حرارت در زمانهای مختلف و شمارهٔ شاگردان کلاسها و غیره.

ممکن است که دو تغییرپذیر بهم بستگی داشته باشند مانند پهنهٔ یک مربع و درازای پهلوهای آن (ضلعهای آن) که بهم بستگی دارند زیرا تغییر یکی موجب تغییر دیگری است چنانکه اگر درازای پهلوی مربع ۲ متر باشد پهنهٔ آن چهار متر مربع میشود و اگر درازای پهلو شش متر شود پهنه ۳۶ متر مربع خواهد شد یعنی هرگاه درازای پهلو تغییر کند پهنه نیز تغییر میکند و بعکس اگر پهنه ۱۶ متر مربع باشد درازای پهلو ۴ متر خواهد بود و اگر پهنه ۲۰ متر مربع باشد درازای پهلویش برابر $\sqrt{20}$ متر میشود یعنی هرگاه پهنهٔ مربع تغییر کند درازای پهلو نیز تغییر خواهد کرد.

همچنین است حرارت اجاق و مقدار سوخت آن که بهم بستگی دارند و همچنین سرمایه و سود آن و همچنین گنج یک گاز و مقدار فشار آن.

هرگاه دو تغییرپذیر بقسمی باشند که تغییر یکی موجب تغییر دیگری گردد یکی از آنها را

بدلخواه متغیّر و دیگری را تابع آن متغیّر گویند چنانکه در مثال اوّل اگر درازای پهلوی مربع را متغیّر بگیریم پهنه تابع این متغیّر میشود و بعکس اگر پهنه را متغیر میگرفتیم درازای پهلو تابع آن میشد و در مثال آخر اگر گنج گاز را متغیّر بگیریم مقدار فشار تابع آن میشود و بعکس.

۸۷- نمودار - غالباً در زندگی به تغییرپذیرهائی برمیخوریم (مانند مثالهای پیش) که هر یک تابع متغیّری است مانند شمارهٔ قبولیهای ششم سالهٔ کشور در سالهای مختلف که بتغییر سال شمارهٔ قبولیها نیز تغییر میکند. همچنین بهاء خواربار در هفته های مختلف و فرآورده ها و رسیده های کشور در سالهای مختلف. همچنین مصرف آهن در سال ۱۳۱۸ در کشورهای مختلف. همچنین شمارهٔ نفوس کشورها و غیره.

درین قبیل موارد تغییرات این تغییرپذیرها را بشکلهائی مینمایند که آنها را نمودار گویند.

فایدهٔ نمودار اینست که از روی آن بآسانی تغییرات تغییرپذیر و نوع آن معلوم میشود.

مثلاً اگر فرض کنیم درجهٔ حرارت هوا در ساعتهای مختلف یکشبانه روز زمستان چنین باشد:

ساعت	درجهٔ حرارت	ساعت	درجهٔ حرارت
۱۰ صبح	۴°	پنج بعد از ظهر	۵°
۱۱ «	۴٫۵°	۶ «	۴°
ظهر	۵°	۷ «	۳°
یک بعد از ظهر	۵٫۷°	۸ «	۱°
۲ «	۶٫۳°	۹ «	-۰٫۵
۳ «	۶°	۱۰ «	-۲°
۴	۵٫۶°	۱۱ «	۳٫۵°

از روی این جدول می بینیم که از دهِ صبح تا دو بعد از ظهر درجهٔ حرارت مرتباً از ۴° تا ۶٫۳ بالا رفته و از آن پس پائین آمده تا در ساعت یازده بعد از ظهر به ۳٫۵- رسیده است .

برای اینکه این تغییرات بهتر دیده شود آنرا معمولاً بوسیلهٔ یک نمودار مینمایند .

برای این کار دو آسه (محور) برهم عمود میکنند مانند دو آسهٔ ox و oy و برروی هر آسه نقطهٔ o را معمولاً خاستگاه (مبداء) میگیرند .

حال اگر هر تکهٔ زمان را (یکساعت) بیک تکّهٔ خطّی مثلاً بدرازای a روی آسهٔ ox بنمائیم میتوانیم ساعتهای مختلف را برروی این آسه بوسیلهٔ تکهٔ خطهائی بنمائیم مثلاً برای نمایش دو ساعت بعد از ظهر نظر بر آنکه ظهر را خاستگاه زمان و زمانهای بعد از ظهر

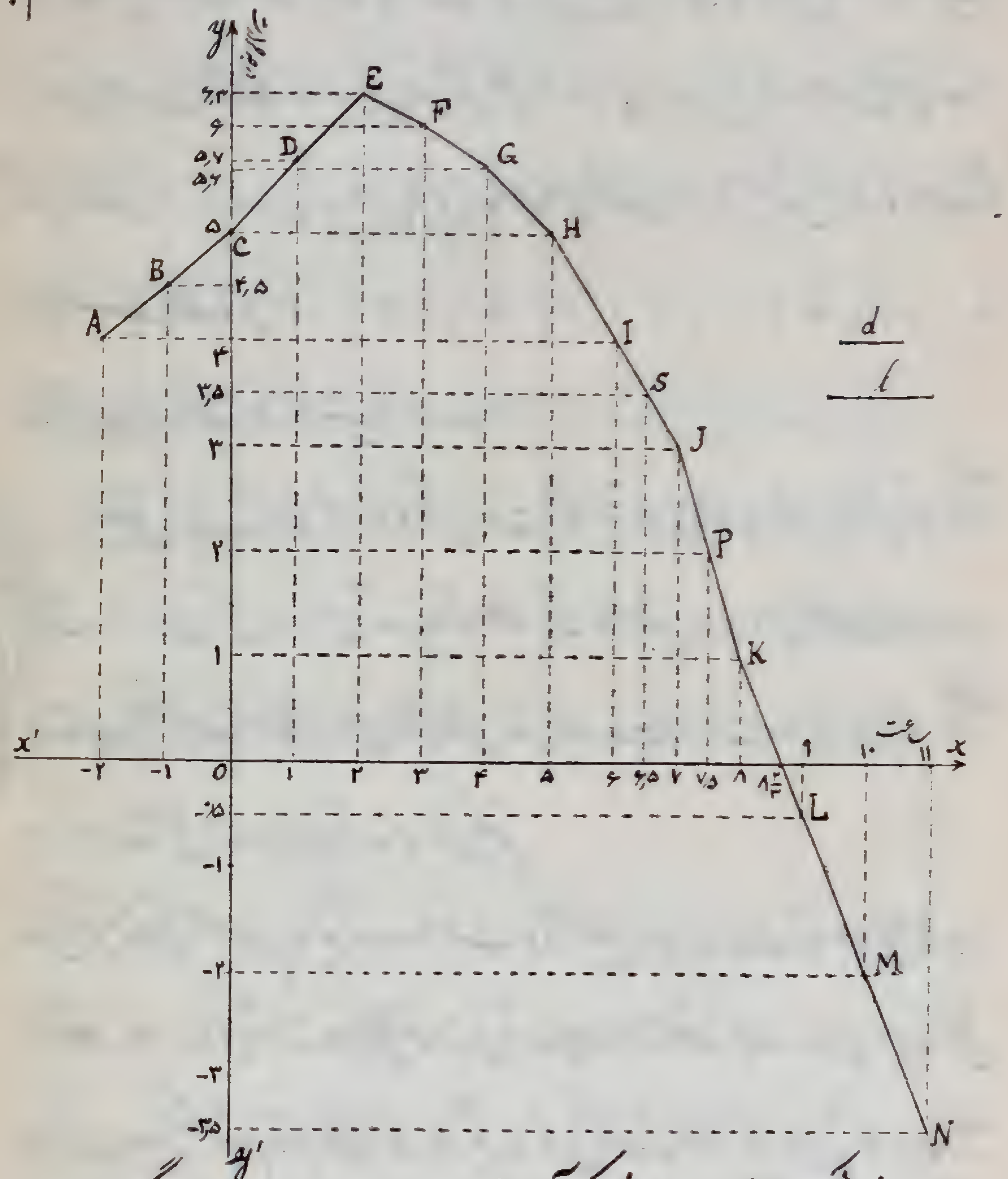
را مثبت بگیریم برروی این آسه از مبداء o تکّهٔ خطّی در جهت مثبت مساوی دو برابر a جدا می کنیم تا نقطهٔ ۲+ بدست آید . همچنین برای نمایش سه ساعت پیش از ظهر کافیست از نقطهٔ o بر این آسه تکّهٔ خطّی مساوی سه برابر a در جهت منفی جدا کنیم تا نقطهٔ ۳- بدست آید بهمین طریق ساعتهای مختلف از ۳ پیش از ظهر تا ۱۱ بعد از ظهر را بوسیلهٔ نقطه های ۳- ؛ ۲- ؛ ۱- ؛ o ؛ ۱ ؛ ۲ ؛ ۳ ؛ ۴ ؛ .... ۱۱ نمایش میدهیم . نقطهٔ o نمایش ظهر است .

بهمین ترتیب تکّهٔ خط b را (ممکن است b مساوی a باشد) نمایش یکدرجه حرارت گرفته و از روی آن برروی آسهٔ oy تکه خطهائیکه نمایش درجه های مختلف حرارت باشد جدا میکنیم . مثلاً برای نمایش ۳٫۵- درجه حرارت سه برابر و نیم b را از نقطهٔ o در جهت منفی برروی این آسه جدا می کنیم .

حال اگر مثلاً بخواهیم بنمائیم که در ساعت ده صبح درجهٔ حرارت ۴° بالای صفر بوده از نقطهٔ ۲- روی آسهٔ ox خطّی موازی آسهٔ oy و از نقطهٔ ۴+ روی oy خطّی موازی ox میکشیم تا در نقطهٔ A همدیگر را تلاقی کنند نقطهٔ A نمایش ۴ درجه حرارت در ساعت ده صبح است . بنابراین در هر ساعتی که درجهٔ حرارت معلوم باشد میتوان نقطه ای مانند A بدست آورد بهمین ترتیب نقطه های B و C و D و ...... N از روی جدول پیش بدست میآید که مثلاً نقطهٔ L نمایش ۵٫۰-

درجه حرارت در ساعت ۹ بعد از ظهر است .

حال نقطهٔ A را به B و B را به C و تا آخر M را به N وصل میکنیم با این



ترتیب خط شکسته ای پیدا میشود که آنرا نمودار درجهٔ حرارت درین مدّت گویند .

فایدهٔ نمودار - از روی نمودار تغییرات درجهٔ حرارت محسوس تر است زیرا وقتی درجهٔ حرارت بالا رود نقطهٔ نمایش آن نیز بالا میرود یعنی نمودار بالا میرود و بعکس

وقتی که درجهٔ حرارت پائین میآید نمودار نیز پائین میآید پس با یک نگاه بر روی نمودار می بینیم که تا دو ساعت بعد از ظهر هوا رو بگرمی است و پس از آن تا ساعت ۱۱ مُرتّباً سرد میشود علاوه بر این از روی این نمودار تقریباً میتوان معلوم کرد که در یکساعت مُعیّنی درجهٔ حرارت چه بوده و یا در چه ساعتی درجهٔ حرارت بمیزان مُعیّنی رسیده است .

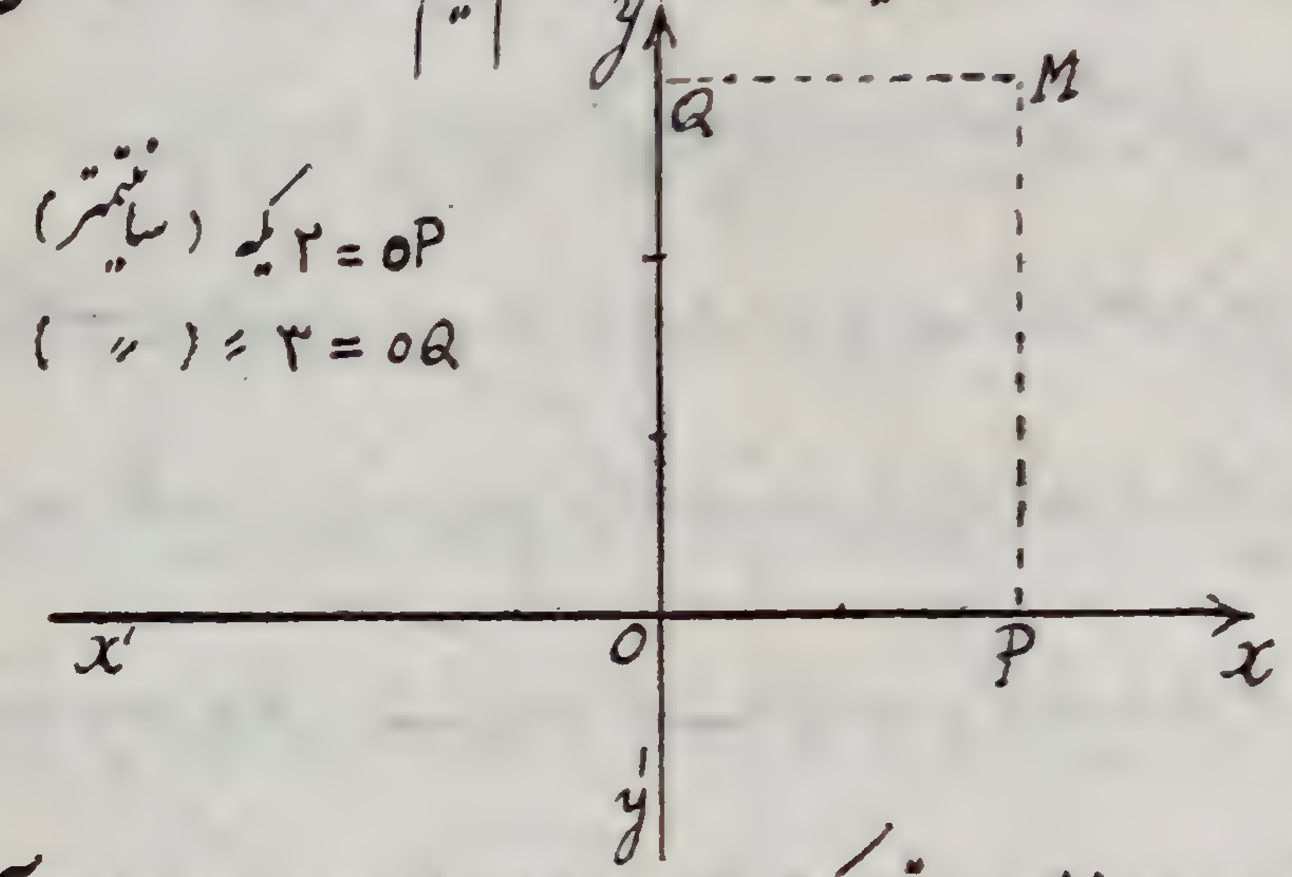
مثلاً اگر بخواهیم درجهٔ حرارت را در ساعت ۶٫۵ بعد از ظهر معلوم کنیم از نقطهٔ ۶٫۵ + روی آسهٔ ox خطّی موازی آسهٔ oy می کشیم تا نمودار را در نقطه S قطع کند و نقطهٔ نظیر S روی آسهٔ oy درجهٔ حرارت آن ساعت را بما میدهد که تقریباً ۳٫۵° + است . همچنین میتوان تقریباً معلوم کرد ساعتی را که در آن وقت درجهٔ حرارت ۲° + بوده است . برای این کار از نقطهٔ ۲ + بر روی آسهٔ oy خطّی موازی آسهٔ ox رسم می کنیم تا نمودار را قطع کند و نقطهٔ P بدست آید . نظیر این نقطه روی آسهٔ ox آنساعت را بما میدهد (تقریباً ساعت ۷٫۵)

بخصوص از روی نمودار دیده میشود که در ساعت ۸ و ۴۰ دقیقه درجهٔ حرارت صفر شده و از آن ببعد زیر صفر است .

می بینیم که هر نقطهٔ مانند A نمایش درجهٔ حرارت در زمان مُعیّن است که هر یک بیک عدد جبری نموده میشوند این دو عدد جبری را **مختصّات** نقطه گویند .

۸۸ - مختصّات - در صفحه دو آسهٔ x'ox و y'oy را برهم عمود می کنیم خاستگاه

هردو آسه را نقطهٔ O میگیریم و جهت مثبتی را روی هر یک اختیار می کنیم. روی $x'Ox$ جهت مثبت از x' بسمت x و روی $y'Oy$ جهت مثبت از y' به y خواهد بود حال اگر از نقطهٔ M دو خط موازی این دو آسه رسم کنیم تا $x'x$ را در نقطه ای مانند P و



$y'y$ را در نقطه ای مانند Q قطع کند $\overline{OP}$ (اندازهٔ جبری OP روی آسهٔ $x'x$) را آبسیس[1] یا x نقطهٔ M و $\overline{OQ}$ (اندازهٔ جبری OQ روی آسهٔ $y'y$) را اُردنه[2] یا y نقطهٔ M گویند $x = \overline{OP}$ و $y = \overline{OQ}$ (معلوم است برای معین کردن اندازه های جبری $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ باید پس از یافتن نشانهٔ آنها درازای هر یک را با یکه ای بسنجید. این یکه برای دو آسه ممکن است مساوی یا مختلف باشد)

آسهٔ $x'Ox$ را آسهٔ x ها یا آسهٔ آبسیس ها و آسهٔ $y'Oy$ را آسهٔ y ها یا آسهٔ اُردنه ها مینامند.

باین ترتیب دیده میشود که هر نقطه دارای یک آبسیس و یک اُردنه میباشد که آنها را **مختصّات** این نقطه گویند و دو آسهٔ $x'x$ و $y'y$ را آسه های **مختصّات** نامند.

مثلاً اگر در شکل پیش OP برابر ۲ یکهٔ آسهٔ Ox (سانتیمتر) و OQ برابر ۳ یکهٔ آسهٔ Oy (سانتیمتر) باشد خواهیم داشت:

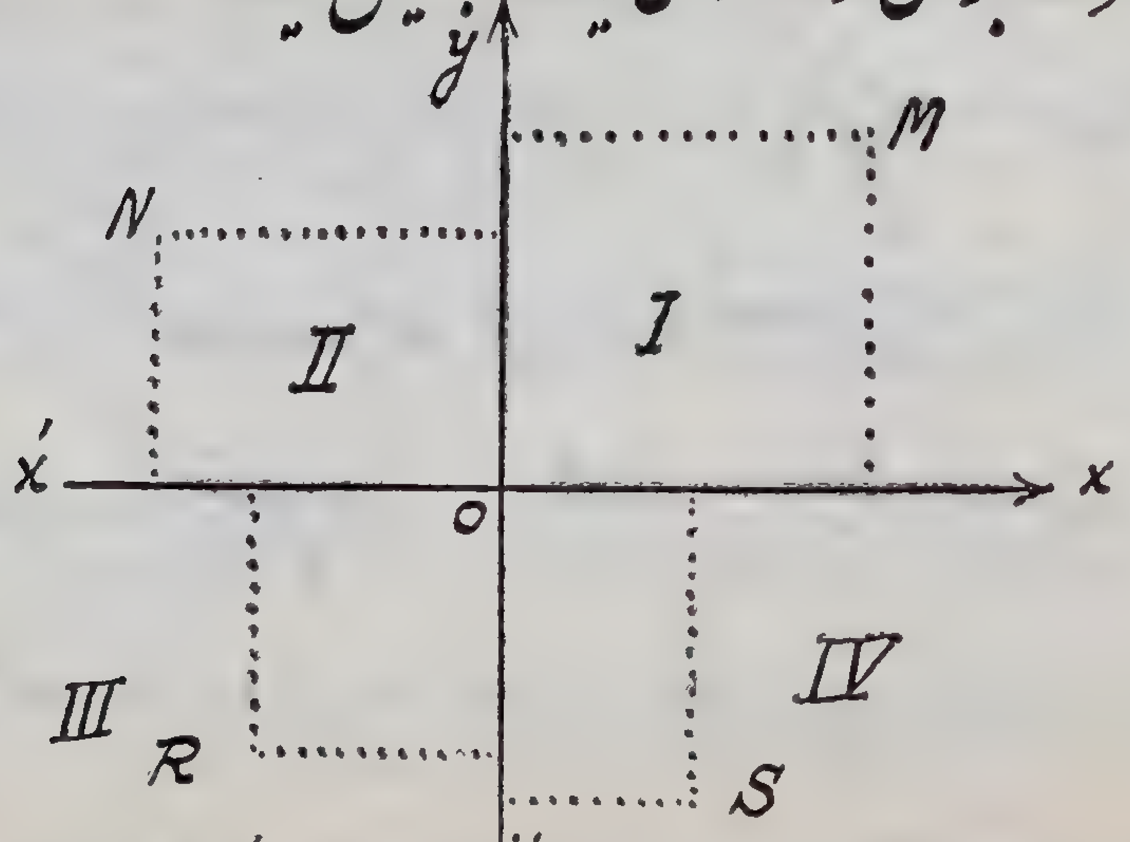
$$\overline{OQ} = +۳ \quad \text{و} \quad \overline{OP} = +۲$$

پس مُختصّات این نقطه ۲+ و ۳+ است گوئیم آبسیس M ۲+ و اُردنهٔ آن ۳+ است و آنرا چنین نویسند:

$$M \Big| {}^{۲}_{۳} \quad \text{یا} \quad M\,(+۲ \,،\, +۳)$$

۸۹- نشانهٔ مُختصّات - از آنچه گفتیم معلوم میشود:

۱- هر نقطه برای خود دارای یک آبسیس و یک اُردنه است



ب - دو آسهٔ مختصات صفحه را بچهار ناحیه تقسیم میکنند (مطابق شکل) نقطه هائیکه

درناحیهٔ I واقع باشند دارای آبسیس و اردنه مثبت اند مانند نقطهٔ M وهرنقطهٔ که درناحیهٔ II قرارداشته باشد آبسیسش منفی است ولی اُردنهٔ آن مثبت است مانند نقطهٔ N

ونقطه هائی که درناحیهٔ III هستند آبسیس و اُردنهٔ آنها هردو منفی است مانند نقطهٔ R

بالاخره نقطه های واقع درناحیهٔ IV آبسیشان مثبت ولی اُردنهٔ آنها منفی است مانند نقطهٔ S

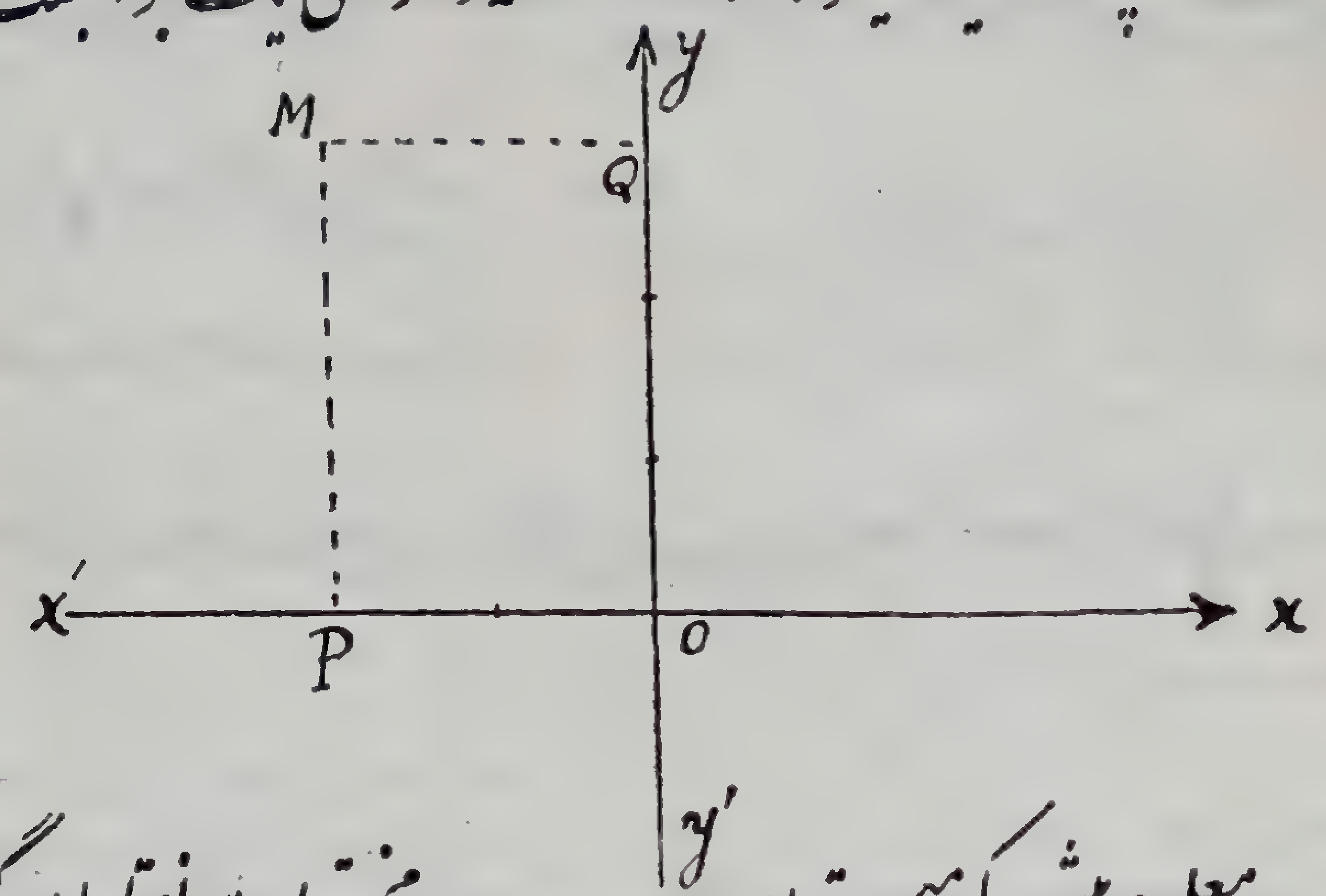
وبطور خلاصه میتوان گفت که آبسیس و اُردنهٔ نقطه های واقع دردو ناحیهٔ I و III هم نشانه اند و درناحیه های II و IV دارای نشانه مختلف میباشند.

ج - اردنهٔ نقطه های آسهٔ x ها صفراست و آبسیس نقطه های آسهٔ y ها نیز صفراست.

د - بنابراین تنها نقطه ای که آبسیس و اُردنه اش صفراست خاستگاه O میباشد

۹۰ - بعکس اگر مختصات نقطه ای را داشته باشیم میتوانیم آن نقطه را در سطح دو آسهٔ مختصات پیدا کنیم مثلاً $M\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ اینطور بدست میآید که برروی آسهٔ x ها $\overline{OP}$ را مُساوی ۲- وبرروی آسهٔ y ها $\overline{OQ}$ را مساوی ۳+ جدا میکنیم واز نقطه های P و Q بترتیب خطّی موازی آسهٔ y ها و آسهٔ

x ها میکشیم این دو خط یکدیگر را درنقطه ای مانند M قطع میکنند که آن نقطه جواب مسئله است. چنانکه دیده میشود همواره مسئله دارای یک جوابست.



بهمین ترتیب معلوم میشود که میتوان هردو عدد را مختصات نقطه ای گرفت.

تمرین

۱- سه گوشه ای (مثلثی) رسم کنید که مختصات تارکهایش (رأس ها) چنین باشد

$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-3\\-2\end{matrix}\right.$

۲- ازمتوازی الاضلاع $ABCD$ مختصات تارکهای A و B و C را داریم $A\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ متوازی الاضلاع را رسم نموده نقطهٔ D را پیدا کنید و مختصات آنرا بدست آورید.

۳- این نقطه ها را پیدا کنید $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}1/5\\3\end{matrix}\right.$ وتحقیق کنید که هرسه روی خط راستی واقعند که ازخاستگاه میگذرد.

۴- سه دسته جواب همچندی $y-2x=0$ را بدلخواه پیدا کنید و هردسته را

مختصات نقطه ای بگیرید و تحقیق کنید که این نقطه ها بر خط راستی واقعند که از خاستگاه میگذرد

۵- این نقطه ها را پیدا کنید $A\left|\begin{matrix}1\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}0\\ -\frac{1}{3}\end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ و تحقیق کنید که هر سه روی خط راستی واقعند.

۶- سه دسته جواب همچندی $2x-3y-1=0$ را بدلخواه پیدا کنید و هر دسته را مختصات نقطه ای بگیرید و تحقیق کنید که این نقطه ها بر خط راستی قرار دارند که از خاستگاه نمیگذرد.

این خط هر آسه را در نقطه ای قطع میکند. مختصات این نقطه را پیدا کنید.

۷- درجهٔ حرارت بدن ناخوشی در مدت ۱۲ ساعت هر دو ساعت بدو ساعت چنین بوده است:

زمان	۸ صبح	۱۰ صبح	ظهر	دو بعد از ظهر	۴ بعد از ظهر	۶ بعد از ظهر	۸ بعد از ظهر
درجهٔ حرارت	۳۶°	۳۶٫۵°	۳۶٫۵°	۳۷٫۵°	۳۸°	۳۹°	۳۷°

نمودار تب این ناخوش را بکشید.

یادآوری - چون حرارت بدن ناخوش معمولاً از ۳۵° پائین تر نیست بهتر این است که در روی آسه درجهٔ حرارت خاستگاه ۰ را درجهٔ ۳۵ بگیریم بنابراین برای نمودن درجهٔ ۳۶ کافیست فقط یک یکه از ۰ روی این آسه در جهت مثبت جدا کنیم.

۸- فرستاده های پشم ایران در سالهای میان ۱۳۰۵ و ۱۳۱۵ چنین بوده است:

سال	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰،۱۱	۱۱،۱۲	۱۲،۱۳	۱۳،۱۴	۱۴،۱۵
مقدار فرستاده به ۱۰۰۰ تن	۶٫۱	۴٫۵	۵٫۵	۵٫۳	۵٫۷	۵٫۲	۴٫۷	۴٫۸	۷٫۲	۸٫۹

نمودار آن را بکشید.

۹- شمارهٔ قبولشدگان نهائی دورهٔ دوم دبیرستان کشور در سالهای میان ۱۲۹۵ و ۱۳۰۵ چنین است:

سال	۱۲۹۵	۱۲۹۶	۱۲۹۷	۱۲۹۸	۱۲۹۹	۱۳۰۰	۱۳۰۱	۱۳۰۲	۱۳۰۳	۱۳۰۴	۱۳۰۵
شماره	۱۱	۱۸	۱۸	۱۲	۸	۹	۲۹	۳۷	۵۷	۷۷	۱۱۰

نمودار آن را بکشید.

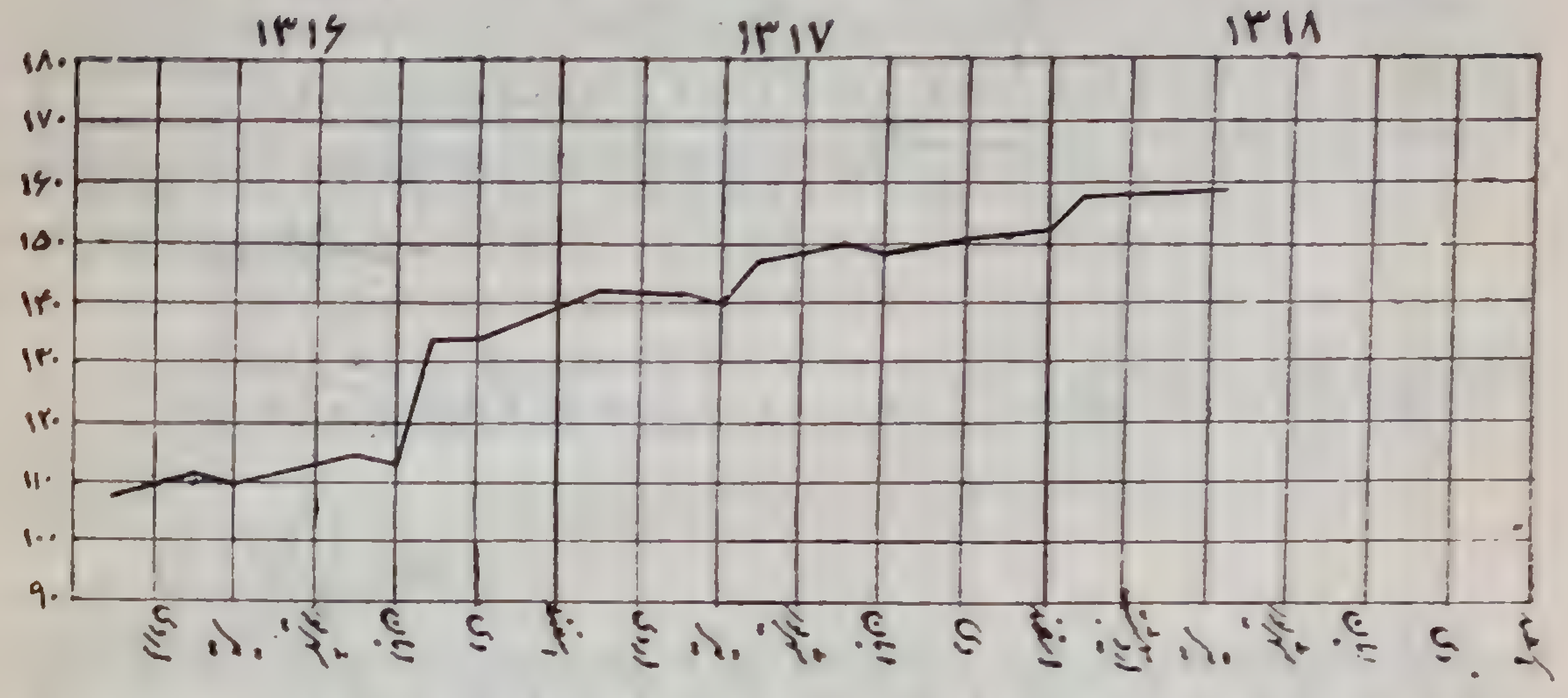
۱۰- شمارهٔ قبول شدگان نهائی دورهٔ دوم دبیرستان کشور در سالهای ۱۳۰۶ تا ۱۳۱۷ چنین است:

سال	۱۳۰۶	۱۳۰۷	۱۳۰۸	۱۳۰۹	۱۳۱۰	۱۳۱۱	۱۳۱۲	۱۳۱۳	۱۳۱۴	۱۳۱۵	۱۳۱۶	۱۳۱۷
شماره	۱۳۹	۱۸۸	۲۰۵	۳۳۲	۳۷۴	۴۳۱	۶۰۶	۹۷۸	۷۴۸	۸۵۵	۱۱۱۸	۱۰۸۶

نمودار آنرا بکشید.

۱۱- نمودار سیر هزینهٔ نشیمن در ایران در سالهای ۱۳۱۵ و ۱۳۱۶ و ۱۳۱۷ و ۱۳۱۸ چنین است:

پایهٔ متوسط سال ۱۳۱۵ = ۱۰۰



ازین نمودار چه میفهمید ؟

۹۱ - نمودارهای دیگر - غیر از نمودار یکه گفتیم تغییرات تغییرپذیرها را بوسیلهٔ نمودارهای دیگری نیز مینمایند

مثلاً شمارهٔ قبول شدگان شش سالهٔ ابتدائی از سال ۱۳۱۱ تا ۱۳۱۷ مطابق این جدول است :

سال	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
شماره	۵۴۱۷	۶۵۳۶	۷۲۵۳	۸۸۸۴	۱۰۰۰۷	۱۳۸۰۹	۱۶۲۳۳

برای نمایش تغییرات شمارهٔ قبول شدگان ابتدائی درین ۷ سال ممکن است غیر از طریقهٔ پیش چند راه دیگر بکار برد : .

نمودار ۱ - شمارهٔ قبول شدگان هر سال را با یک راست گوشه مینمایند: راست گوشهٔ سالهای مختلف همه دارای قاعدهٔ متساوی هستند و بلندی آنها

متناسب با شمارهٔ قبولیهای آن سال است . چنانکه اگر هر یک سانتیمتر بلندی را نمایش شمارهٔ ۱۰۰۰ نفر قبولی بگیریم راست گوشهٔ نمایش سال اول تقریباً به بلندی ۵٫۴ سانتیمتر

و در سال ۱۲ « ۶٫۵

در سال ۱۳ « ۷٫۲

و در سال ۱۴ « ۸٫۹

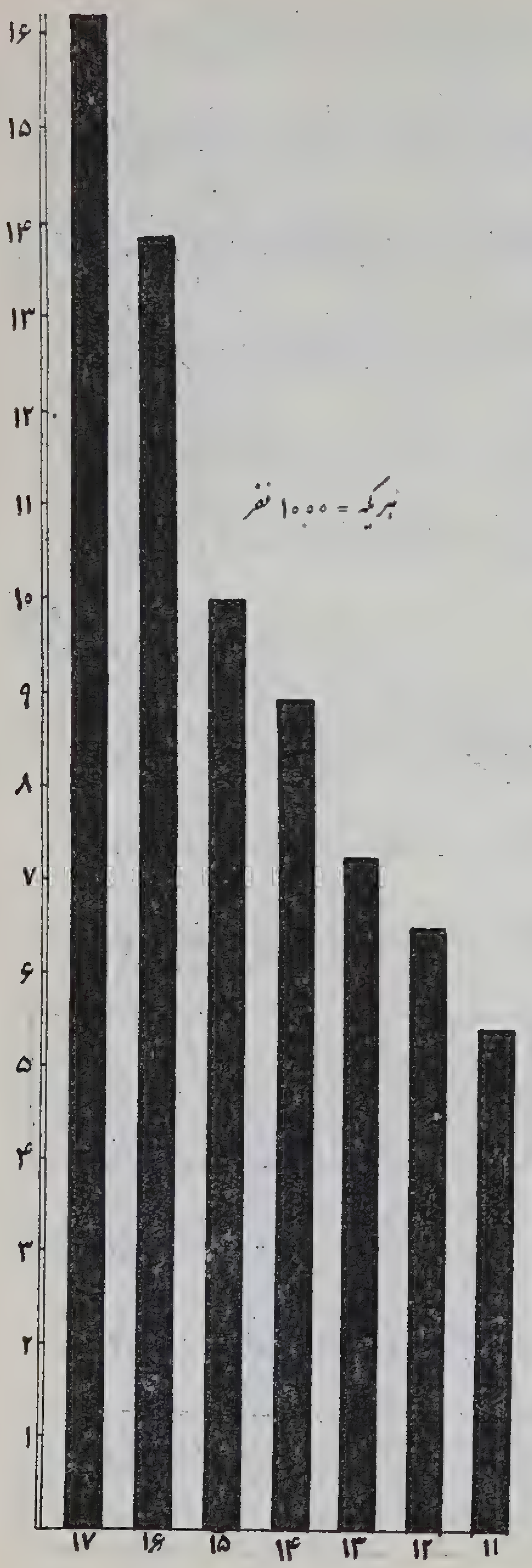
و در سال ۱۵ « ۱۰

و در سال ۱۶ « ۱۳٫۸

و در سال ۱۷ « ۱۶٫۲

خواهد بود .

و باین ترتیب این نمودار را خواهیم داشت .



از جدول پیش نیز میتوانستیم تغییرات شمارهٔ قبولی را درین مدت بفهمیم ولی چنانکه می بینیم از روی نمودار این تغییرات محسوس تر است و از روی آن بخوبی نسبت تقریبی شمارهٔ قبولی هر سال با سالهای دیگر بدست میآید.

تبصره - بوسیلهٔ این نوع نمودار معمولاً چند بهائی را با هم می سنجند که از یک جنس باشند بدون اینکه لزوماً با هم بستگی داشته باشند. مثلاً مقایسهٔ درازای راه آهنهای چند کشور و پهنهٔ چند کشور و فرستاده های چند کشور.

تمرین

۱- شمارهٔ دختران قبول شده در دورهٔ شش سالهٔ دبستان از سالهای ۱۳۰۰ تا ۱۳۰۹ چنین است:

سال	۱۳۰۰	۱۳۰۱	۱۳۰۲	۱۳۰۳	۱۳۰۴	۱۳۰۵	۱۳۰۶	۱۳۰۷	۱۳۰۸	۱۳۰۹
شماره	۱۵۱	۱۸۰	۳۰۹	۳۱۳	۳۸۰	۴۵۱	۶۴۹	۷۶۲	۱۰۲۹	۱۱۲۹

نمودار آن را بکشید.

۲- شمارهٔ دختران دورهٔ شش سالهٔ دبستان در سالهای ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۷ چنین است:

سال	۱۳۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
شماره	۱۳۸۴	۱۳۰۴	۱۷۳۰	۱۸۶۶	۲۲۵۳	۲۴۶۵	۳۳۶۷	۳۹۳۰

نمودار آن را بکشید.

۳- شمارهٔ فارغ التحصیلهای آموزشگاههای عالی در سالهای اخیر چنین است:

سال تحصیلی	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۶-۱۷
فارغ التحصیل	۷۴	۱۱۵	۱۰۲	۱۸۳	۳۰۵	۳۶۷	۳۲۱

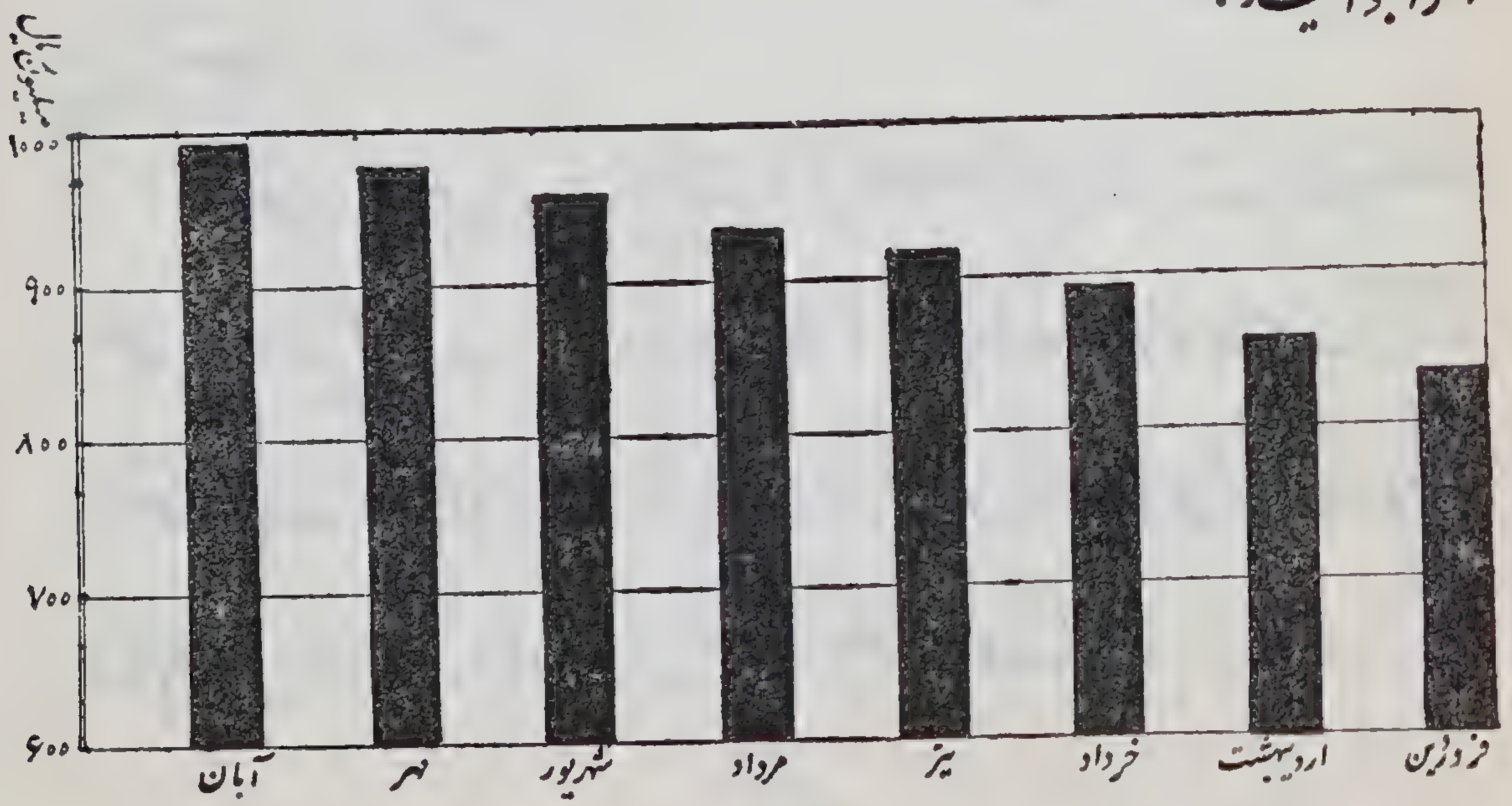
نمودار آنرا بکشید.

۴- فرستادهٔ پستهٔ ایران در سالهای بین ۱۳۰۵ و ۱۵ چنین بوده است:

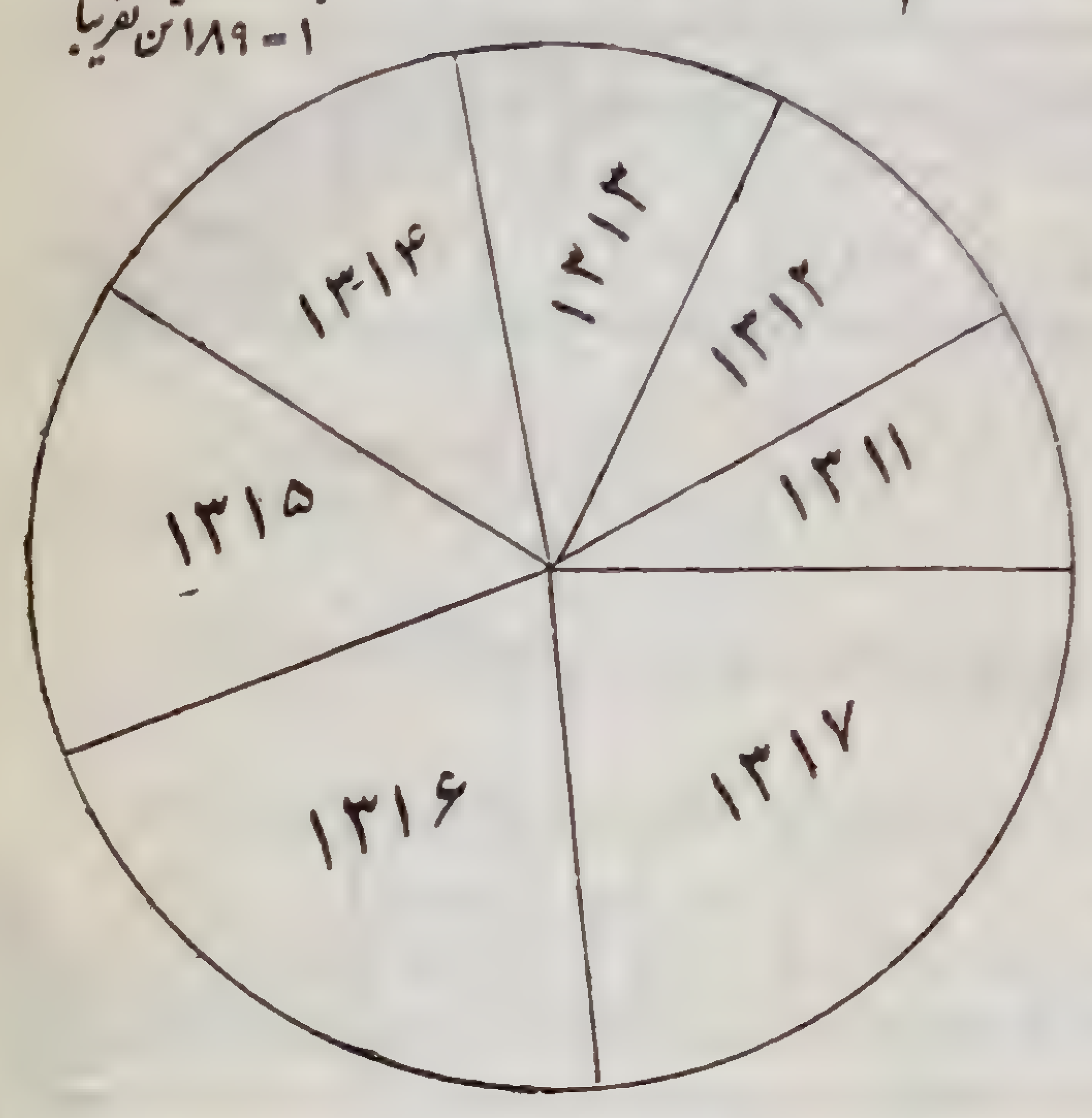
سال	۱۳۰۵	۱۳۰۶	۷	۸	۹	۱۰٫۱۱	۱۱٫۱۲	۱۲٫۱۳	۱۳٫۱۴	۱۴٫۱۵
فرستادهٔ پسته به تن	۱۸۲	۴۷۸	۵۷۱	۴۳۱	۶۸۹	۵۵۳	۳۶۶	۳۵۹	۹۱۲	۴۷۳

نمودار آنرا بکشید.

۵- نمودار اسکناس های در دست مردم از فروردین تا آبان ۱۳۱۸ چنین است آنرا بخوانید:



نمودار ۲- دائرهٔ ای بشعاع اختیاری رسم می کنیم و شمارهٔ قبولیهای هر سال را بقطاعی ازین دائره مینمائیم که زاویهٔ آن قطاع متناسب باشد با شمارهٔ قبولیهای آن سال - برای این کار ۳۶۰ درجه را بنسبت شمارهٔ قبولیهای این هفت سال بخش می کنیم.



ازین نمودار نیز بآسانی تغییرات شمارهٔ قبولیها درین سالها معلوم میشود یعنی در سالی که قطاع آن بزرگتر است شمارهٔ قبولیهای آن سال زیادتر است و نیز از مقایسهٔ قوسهای قطاع ها می توان بنسبت بین قبولی ها را معلوم کرد.

تبصره - این نمودار بیشتر وقتی بکار میرود که بخواهند بنسبت بین چندیهای همجنس را معین کنند مانند مقایسهٔ پهنه های چند کشور و مقایسهٔ هزینه های مختلف یک خانواده در یکسال و مقایسهٔ نفوس نژادهای مختلف کرهٔ زمین و نمایش مقدار فرستاده های مختلف یکسالهٔ یک کشور.

تمرین

فرستاده های ایران بکشورهای نامبردهٔ زیر در سال اقتصادی ۱۸ / ۱۳۱۷ چنین بوده است:

کشور	آلمان	اتحاد جماهیر شوروی	بریتانیای بزرگ	هندانگلیس	دول متحدهٔ امریکا	ژاپون	بلژیک	هلند
مبلغ بمیلیون ریال	۳۰۱٫۸	۲۵٫۶	۶۴٫۶	۳۸٫۲	۵۲	۱۹٫۱۴	۲٫۲	۶٫۳
کشور	هندهلند	عراق	فرانسه	چکوسلواکی	مالزی انگلیس	سوئد	ایتالیا	
مبلغ بمیلیون ریال	۳	۲۲٫۹	۸٫۹	۲٫۴۰	۷٫۵	۴٫۷	۳	

نمودار آنرا بکشید.

نمودارهای دیگر - غیر از سه نمودار بالا نمودارهای دیگری نیز معمول است درین نمودارها چندیها را بشکل هائی شبیه خود نمایش میدهند با اندازه های مختلف بقسمی که اندازهٔ هرکدام متناسب است با مقدار چندی نظیرش مثلاً اگر بخواهند مقدار نفت هائی که هر سال در کشورهای مختلف استخراج میشود با هم مقایسه کنند ممکن است آنها را به پیت هائی متشابه نمایش دهند (که درشکل به راست گوشه های متشابه نموده میشود) و پهنهٔ هر راست گوشه متناسب با مقدار نفت سالیانهٔ آن کشور است.

همچنین برای مقایسهٔ جمعیّت کشورهای مختلف جمعیّت هر کشور را آدمی شبیه باکثریت اهالی آنها نمایش میدهند بطوریکه بزرگی و کوچکی آنها اختلاف جمعیّت آن کشورها را میرساند.

همچنین اندوختهٔ طلا را بسکّه های طلا که شمارهٔ آنها برای هر کشور متناسب با اندوختهٔ طلای آن کشور است مینمایند.

و وقتی میخواهند در کشورهای دریائی گنجایش کشتی های بازرگانی آنها را بنمایند گنجایش کشتی های بازرگانی هر کشور را بیک کشتی نمایش میدهند که بزرگی آن متناسب با گنجایش کشتی های بازرگانی همان کشور است.

بخش دوّم

همچندیهای یک مجهولی درجهٔ دوّم

فصل اوّل

حلِّ همچندیهای یک مجهولی درجهٔ دوّم

۹۲- **تعریف** - همچندی یک مجهولی را از درجهٔ دوّم گوئیم هرگاه تمام جمله ها را بیک طرف ببریم و ساده کنیم عبارت چند جمله ای از درجهٔ دوّم برحسب آن مجهول بدست آید مانند همچندیهای زیر:

$x^2 - 9 = 0$ که همچندی درجهٔ دوّمی است نسبت بمجهول x

$a^2 - 3a = 0$ 〃 〃 〃 〃 a

$y^2 + 5y = 6$ 〃 〃 〃 〃 y

همچنین همچندی $x(x^3 - 3x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$ هم از درجهٔ دوّم است زیرا پس از ساده کردن چنین میشود:

$$2x^2 + 3x - 3 = 0$$

و بطور کلّی هرگاه تمام جمله های همچندی درجهٔ دوّمی را بیک طرف ببریم و آنها را ساده

کنیم اگر a را ضریب درجهٔ دوم مجهول آن همچندی (مثلاً x) بگیریم و b را ضریب درجهٔ اوّل آن و c را جملهٔ معلوم قرار دهیم آن همچندی چنین میشود:

$$ax^2 + bx + c = 0$$ (شمارهٔ ۸۸ جلد اوّل)

که در آن a باید همواره مخالف صفر باشد. این همچندی را صورت کلّی همچندیهای درجهٔ دوم گویند.

بنابرآنکه b یا c و یا هر دو صفر باشند همچندیهای

$ax^2+c=0$ و $ax^2+bx=0$ و $ax^2=0$

بدست میآید که هریک را همچندی ناقص درجهٔ دوم گویند مانند همچندیهای:

$5x^2-9=0$ و $2a^2+3a=0$ و $3y^2=0$

۹۳- حلّ همچندیهای درجهٔ دوم - چنانکه میدانیم حلّ یک همچندی یافتن عدد یا عددها و یا عبارتهائیست که چون بجای مجهول در همچندی گذارده شود تساوی عددی یا اتحاد بدست آید و این عددها یا عبارتها را جوابهای آن همچندی نامیم.

نخست - حلّ همچندیهای ناقص درجهٔ دوم - الف - حلّ $ax^2=0$

چون ضریب x یعنی a مخالف صفر است بنابراین $x^2=0$ و از آنجا $x=0$ یعنی جواب همچندی صفر میباشد.

ب - حلّ همچندی $ax^2+bx=0$ مثلاً میخواهیم همچندی $2x^2-3x=0$ را حل کنیم چون طرف اوّل را تجزیه کنیم همچندی بدین صورت درآید: $x(2x-3)=0$

که بموجب شماره ۱۲۳ جلد اوّل یا $x=0$ و یا $2x-3=0$

که جوابهای آنها صفر و $\frac{3}{2}$ است.

می‌بینیم هرچه باشد ضریبها همیشه همچندی $ax^2+bx=0$ دارای دو جوابست که یکی از آنها صفر و دیگری $-\frac{b}{a}$ است

زیرا همچندی بالا را میتوان چنین نوشت $x(ax+b)=0$ که خواهیم داشت یا $x=0$ و یا $ax+b=0$ که از آن نتیجه میشود $x=-\frac{b}{a}$

پرسش های ساده

۱- جوابهای این همچندیها را بدست آورید:

$y^2=5y$ و $x^2-3x=0$

$b^2=-2b$ و $2y^2+3y=0$

$x^2+3x=2x^2$ و $3a^2-a=2a$

۲- این همچندیها را حل کنید:

$(۲x-۱)(۳x+۴) = (x+۲)(x-۲)$

$(a-۵)(۲a-۱) = ۳a^۲-۴a+۵$

$(x-۲)(x+۱)-۳x+۲ = (x+۳)^۲-۹$

۷- حلّ همچندی $ax^۲+c=۰$

مثلاً میخواهیم همچندی

$۴x^۲-۹=۰$ راحل کنیم

دوطرف رابر ۴ بخش می کنیم $x^۲-\frac{۹}{۴}=۰$

چون طرف اوّل را بسازه های اوّل تجزیه کنیم (شمارهٔ ۱۲۱ جلداوّل)

خواهیم داشت: $(x-\frac{۳}{۲})(x+\frac{۳}{۲})=۰$

بموجب (شمارهٔ ۱۲۳ جلداوّل) یا $x-\frac{۳}{۲}=۰$ ویا

$x+\frac{۳}{۲}=۰$ که ازحلّ هرکدام یک جواب بدست میآید

پس همچندی $۴x^۲-۹=۰$ دارای دوجواب قرینهٔ $\pm\frac{۳}{۲}$ است

مثال دیگر- برای حلّ همچندی $۳x^۲+۱۳=۰$ می بینیم که طرف اوّل تجزیه پذیر بسازه های اوّل نیست . نبابراین نمیتوانیم جوابهای آن را ازین راه بدست آوریم ولی واضح است که این همچندی جواب ندارد زیرا x هرچه باشد توان دوّمش مثبت است (ویا صفر) وچون درعدد مثبتی (مانند ۳) ضرب وباعدد مثبتی (مانند ۱۳) جمع شود حاصل مثبت میشود

یعنی هیچوقت مساوی صفر نمیشود نبابراین این همچندی جواب ندارد . همچنین است همچندی $-۹x^۲-۷=۰$ که جواب ندارد بدلیلی مانند پیش .

پس هرگاه در همچندی $ax^۲+c=۰$ ضریب درجهٔ دوّم و مقدار معلوم (یعنی a و c) هم نشانه باشند همچندی دارای جواب نیست و درغیراین صورت دارای دوجواب قرینه $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ است .

پرسش های ساده

۱- نخست معلوم کنید کدام یک ازین همچندیها دارای جواب هستند وکدام یک جواب ندارند سپس آن همچندیهائی را که دارای جواب هستند حل کنید

$a^۲=۲۵$	$۲x^۲-۸=۰$
$-۳y^۲=-۲۷$	$۲b^۲=۱۶۲$
$-۳x^۲=۲۴$	$۵a^۲+۱۲۵=۰$
$-۵x^۲-۲۰=۰$	$-y^۲+۱۶=۰$

۲- این همچندیها راحل کنید:

$(۲x-۳)(x+۵) = x^۲+۷x-۶$

$(x+۱)(x-۱) = (x-۱)^۲+x^۲+۲x-۴$

$$(3x+5)(2x-3)-3x=(5x-1)(x+1)-6x$$

دوّم ـ حل همچندی کامل درجهٔ دوّم ـ مثلاً میخواهیم همچندی

$$x^2-3x+2=0$$

را حل کنیم. کوشش می‌کنیم که طرف اوّل این همچندی را بصورت تفاضل دو توان دوّم درآوریم تا بتوانیم مانند همچندیهای بالا آن را تجزیه کرده حل کنیم.

برای این کار عددی پیدا می‌کنیم که چون بر x^2-3x افزوده شود حاصل توان دوّم یک دوجمله شود آن عدد $(\frac{-3}{2})^2=\frac{9}{4}$ است.

زیرا $x^2-3x+\frac{9}{4}=(x-\frac{3}{2})^2$

از اینجا خواهیم داشت $x^2-3x=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$

که چون در همچندی بالا ببریم چنین خواهد شد:

$$(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2=0$$

ویا $(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}=0$

که میتوان آنرا تجزیه نمود (بصورت a^2-b^2 است):

$$(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2})=0$$

وبموجب شمارهٔ ۱۲۳ کتاب اوّل خواهیم داشت:

یا $x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=0$ ویا $x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=0$

که از حلّ هریک یکجواب برای همچندی پیدا میشود پس همچندی بالا دارای دو جواب $x=2$ و $x=1$ میباشد.

مثال دیگر ـ میخواهیم همچندی $2x^2-5x+2=0$ را حل کنیم

ضریب x^2 یعنی ۲ را سازه میگیریم: $2(x^2-\frac{5}{2}x+1)=0$ مانند مثال پیش داخل پرانتز را بصورت تفاضل دو توان دوّم درمیآوریم

چون $x^2-\frac{5}{2}x=(x-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{16}$

بنابراین همچندی بالا چنین میشود:

$$2\left[(x-\frac{5}{4})^2-\frac{9}{16}\right]=0$$

ویا $2(x-\frac{5}{4}-\frac{3}{4})(x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4})=0$

پس یا $x-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=0$ ویا $x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=0$

که از حل هریک جوابهای همچندی بدست میآید $x=2$ و $x=\frac{1}{2}$

مثال دیگر ـ میخواهیم همچندی $x^2-2x+5=0$ را حل کنیم

چون $x^2-2x=(x-1)^2-1$

پس همچندی بالا چنین میشود:

$$(x-1)^2-1+5=0$$

ویا $(x-1)^2+4=0$

می بینیم که طرف چپ این همچندی تجزیه پذیر به سازه های درجهٔ اول نیست بنابراین نمیتوان آنرا با این راه حل نمود ولی واضح است که این همچندی جواب ندارد زیرا x هرچه باشد $(x-1)^2$ همیشه مثبت (و یا صفر) است و چون به ۴ افزوده شود حاصل همواره مثبت بوده و هیچوقت مساوی صفر نمیشود.

تمرین

۱- این همچندیها را حل کنید:

$x^2+x-6=0$ $\qquad$ $a^2-5a+4=0$

$b^2-b+2=0$ $\qquad$ $2y^2-4y-3=0$

$2x^2+7x+3=0$ $\qquad$ $3x^2-7x-6=0$

۲- جوابهای این همچندیها را بدست آورید:

$$(2x-1)(3x-2)=x^2+5x-6$$

$$(3x-2)^2-7x=(x-1)(x+1)-15x+17$$

$$x^2-3x+(x-1)^2=2x^2+7-(x+1)^2$$

۹۴- حل همچندی کلی $ax^2+bx+c=0$. چون در طرف اول همچندی a را سازه قرار دهیم همچندی باین صورت نوشته میشود:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \qquad (1)$$

میتوان $x^2+\frac{b}{a}x$ را دو جملهٔ اول توان دوم یک دو جمله گرفت که جملهٔ اول آن x باشد بنابراین جملهٔ دوم آن

$$\frac{bx}{a}:2x=\frac{b}{2a}$$

خواهد بود

و $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

پس $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$

و چون در همچندی (۱) ببریم چنین خواهد شد:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 \qquad (2)$$

که همان همچندی (۱) است که باینصورت نوشته شده حال اگر:

اولاً $0>b^2-4ac$ درینحالت داخل کروشه همچندی (۲) هرچه باشد x مثبت خواهد بود زیرا $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ همیشه مثبت (و یا صفر) است و با عدد مثبت $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ جمع میشود و حاصل مثبت میگردد بنابراین هیچوقت صفر نمیشود پس درانیحالت همچندی جواب ندارد.

ثانیاً $0<b^2-4ac$ درینصورت همچندی (۲) را میتوان چنین نوشت

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0$$

که پس از تجزیه کردن طرف اول بصورت زیر نوشته میشود:

(۳) $a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$

وچون a مخالف صفراست باید دست کم یکی از دو سازهٔ دیگر صفر باشد که از صفر قرار دادن هریک از آنها جوابهای زیر بدست میآید :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

پس درینحالت که b^2-4ac (b^2-4ac را Δ یا مُبیّن بنامند) مثبت است همچندی دو جواب دارد که میتوان هردو را در یک دستور نوشت

(ح) $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ثالثاً $b^2-4ac=0$. درینحالت همچندی (۲) چنین میشود

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

ویا $x+\frac{b}{2a}=0$ یعنی $x=-\frac{b}{2a}$

درینحالت همچندی تنها یک جواب دارد .

تبصره - درحالتیکه $b^2-4ac=0$ است میتوان جوابرا از دستور (ح) نیز بدست آورد $x=\frac{-b\pm 0}{2a}=\frac{-b}{2a}$ که آنرا **جواب مضاعف** خوانند .

۹۵- قاعده برای حلّ همچندی $ax^2+bx+c=0$

نخست b^2-4ac را حساب میکنیم سه حالت اتفاق میافتد:

۱- $b^2-4ac<0$ همچندی ریشه ندارد .

۲- $b^2-4ac>0$ همچندی دارای دو ریشه متمایز $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ میباشد .

۳- $b^2-4ac=0$ درینحالت همچندی دارای یکجواب مضاعف (یا دو ریشه مساوی باهم) $x=-\frac{b}{2a}$ است .

مثال ۱ - همچندی $2x^2-5x+2=0$ را حل کنید

چون $b^2-4ac=25-16=9$ مثبت است پس همچندی دارای دو جواب متمایز $x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}$ میباشد یعنی $x_1=2$ و $x_2=\frac{1}{2}$

مثال ۲ - همچندی $4x^2+4x+1=0$ را حل کنید

چون b^2-4ac صفراست بنابراین همچندی دارای یک جواب مضاعف $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-1}{2}$ میباشد .

مثال ۳ - همچندی $5x^2-x+1=0$ را حل کنید

مبیّن این همچندی منفی است بنابراین جواب ندارد .

۹۶- تبصرهٔ ۱ - درحالتیکه ضریب x یعنی b جفت باشد ریشه های همچندی را از روی دستور ساده تری بدست میآوریم :

چون نصف b را b' بگیریم یعنی $b' = \frac{b}{2}$ و یا $2b' = b$ و آنرا در دستور (ج) ببریم چنین خواهد شد:

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

و یا
$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a}$$

و یا
$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

پس
$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \qquad (ج_1)$$

مثال- برای حلّ همچندی $x^2 - 4x + 3 = 0$ بهتر اینست که از روی دستور (ج۱) عمل شود

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{1} = 2 \pm 1$$

بنابراین $x_1 = 3$ و $x_2 = 1$

۹۷- تبصرهٔ ۲- درحالتیکه $b^2 - 4ac$ مثبت است دیدیم که همچندی را بصورت (۳) میتوان نوشت یعنی

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\right)$$

و یا
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

یعنی: هر سه جملهٔ درجهٔ دوّم که دارای دو ریشهٔ غیر مساوی باشد

تجزیه میشود بحاصل ضرب ضریب درجهٔ دوّم در دو سازهٔ درجهٔ اوّل $x - x_1$ و $x - x_2$ که x_1 و x_2 ریشه های آن باشند.

درحالتیکه $b^2 - 4ac = 0$ باشد سه جملهٔ درجهٔ دوّم باینصورت درمیآید:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$
$$= a(x - x_1)^2 = a(x - x_2)^2$$

یعنی: دراینحالت سه جمله درجهٔ دوّم مساویست با حاصل ضرب ضریب درجهٔ دوّم در توان دوّم یک دو جملهٔ درجهٔ اوّل.

مثال ۱- عبارت $5x^2 + 7x - 6$ را بسازه های درجهٔ اوّل تجزیه کنید.

چون دارای دو ریشهٔ متمایز $x_1 = \frac{3}{5}$ و $x_2 = -2$ میباشد بنابراین باینصورت تجزیه میشود:

$$5x^2 + 7x - 6 = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)(x + 2)$$
$$= (5x - 3)(x + 2)$$

مثال ۲- عبارت $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$ را تجزیه کنید

چون مبیّن آن صفر است بنابراین

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = (x - \sqrt{3})^2$$

تمرین

۱- همچندیهای زیر را حل کنید:

$x^2 - 2,4x + 0,8 = 0$ $\qquad$ $3x^2 + 24x + 21 = 0$

$6x^2 + 26\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}x$ $\qquad$ $14x^2 - 33 = 71x$

$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{5}) = 0$

$(x-1)^2 = 5(x^2-1)$

برای حل این دو همچندی نباید ضربها را انجام داد بلکه از شکل همچندی ریشه ها معلومند.

$3x^2 = \frac{2}{5}(x + \frac{4}{5}) + 2x^2$

$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

$abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0$

$x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$y^2 - 2(a - b)y = (a + b)^2$

$(a^2 - b^2)y^2 - 2(a^2 + b^2)y + a^2 - b^2 = 0$

$(a^2 - b^2)(x^2 + 1) = 2(a^2 + b^2)x$

۲- سه جمله ای های زیر را با سازه های اول تجزیه کنید:

$x^2 + x\sqrt{3} - 6$ $\qquad$ $2x^2 - 3x - 35$

$x^2 + 3,5x + 3$ $\qquad$ $x^2 - 2x\sqrt{5} + 4$

$x^2 - (a + b)x + ab$

$x^2 + (a+1)x + a$ و $x^2 - ax - 2a^2$

تبصره- عموماً اتفاق میافتد که $b^2 - 4ac$ توان دوم کامل نیست در این صورت جوابهای همچندی گنگ بوده و مقدار آنها را میتوان با تقریبی که منظور است بدست آورد.

مثلاً جوابهای همچندی $2x^2 - 9x + 5 = 0$ چنین است:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-40}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{4}$$

ریشهٔ دوم ۴۱ تا $\frac{1}{10}$ تقریب ۶٫۴ است پس مقدار تقریبی جوابها چنین است $\frac{9 \pm 6,4}{4}$ و مینویسیم $x_1 \# 3,85$ و $x_2 \# 0,65$

و بواسطهٔ همین تقریب است که اگر مثلاً بجای x در همچندی $2x^2 - 9x + 5 = 0$ عدد ۳٫۸۵ را قرار دهیم طرف اول صفر نمیشود ولی اگر بجای x مثلاً عدد $\frac{9 + \sqrt{41}}{4}$ را بگذاریم طرف اول صفر خواهد شد.

۹۸- بعضی همچندیها هستند که حل آنها منجر بحل همچندی درجهٔ دوم میشود:

مثال- این همچندی را حل کنید:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{5}{4} = 0$$

طرف اوّل را چون بیک برخه نام تبدیل کنیم چنین میشود

$$\frac{5x^2 - 12x + 4}{4x^2} = 0$$

این برخه وقتی صفر است که برخه شمارش مساوی صفر و برخه نامش مخالف صفر باشد

یعنی جواب هچندی بالا مساوی جواب هچندی

$$5x^2 - 12x + 4 = 0$$

است که جوابهای آن $x_1 = 2$ و $x_2 = \frac{2}{5}$ میباشد

تبصره - از ضرب دو طرف هچندی داده شده در کوچکترین مضرب برخه نامها یک هچندی پیدا میشود که جوابش جواب هچندی داده شده است

تمرین

۱- هچندی های زیر را حل کنید:

$$\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2 \qquad \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$$

$$\frac{x+1}{x} + 1 = \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{5x+4}{5x-4} + \frac{5x-4}{4x-4} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+13}{x+1}$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{3x-20}{18-2x} = 2 + \frac{3x^2 \; 80}{2(x-1)}$$

$$\frac{2x-3}{x-2} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{3x+11}{x+1}$$

$$\frac{2a-1}{a-2} + \frac{3a+1}{a-3} = \frac{5a-14}{a-4}$$

$$\frac{4}{y-1} + \frac{1}{y-4} = \frac{3}{y-2} + \frac{2}{y-3}$$

$$\frac{5}{7-a} - \frac{4}{6-a} = \frac{3}{5-a} - \frac{2}{4-a}$$

$$\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x} = \frac{b}{x} \pm \frac{x}{b}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{a-x}{a} = \frac{2a}{x-a}$$

$$\frac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$$

(در حلِ این هچندی بهتر آنستکه $\frac{a-x}{x-b}$ را مساوی مجهول y بگیریم و پس از پیدا کردن y جواب هچندی یعنی x را بدست آوردیم)

$$\frac{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}{1 - \frac{a-x}{a+x}} = a-1$$

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)-(x-b)} = \frac{a^3-b^3}{a+b}$$

$$\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}$$

۲- میدانیم که ۱+ و ۲+ دو جواب هچندی

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$$

است دوجواب دیگر آن را بدست آورید.

۳- m را چنان تعیین کنید که همچندی

$$(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$$

دارای دوجواب حقیقی باشد.

۴- مقدار p را پیدا کنید بطوریکه ۲- یکی از جوابهای این همچندیها باشد.

$$2x^3 - 3px - 1 = 0$$

$$4x^3 + 2x^2 - 12 + px = 0$$

$$-x^3 - 3px^2 + x + 6 = 0$$

پس از بدست آوردن p جوابهای دیگر همچندی های بالا را پیدا کنید.

فصل دوّم

روابط بین ضریبها و جوابهای همچند درجهٔ دوّم

۹۹- دو رابطهٔ مهمّ و ساده بین جوابها و ضریبهای هر همچندی درجهٔ دوّم برقرار است از اینقرار:

از جمع جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ نتیجه میشود

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

ویا

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

یعنی: مجموع دوجواب همچندی درجهٔ دوّم مساویست با «قرینه» نسبت ضریب درجهٔ اوّل بضریب درجهٔ دوّم.

از ضرب دوجواب همچندی درجهٔ دوّم خواهیم داشت:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4} = \frac{4ac}{49a}$$

ویا

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

یعنی: حاصل ضرب دوجواب مساویست با نسبت جملهٔ معلوم بضریب درجهٔ دوّم.

مثلاً در همچندی $3x^2+15x-7=0$ مجموع و حاصل ضرب دو جواب بترتیب چنین است:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{-15}{3}=-5$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-7}{3}$$

معمولاً مجموع دو ریشه را به S و حاصل ضرب آنرا به P مینمایند:

$$S=-\frac{b}{a} \qquad P=\frac{c}{a}$$

جای بکار بردن

۱- تعیین نشانهٔ جوابهای همچندی درجهٔ دوم

۱۰۰- از روی دو رابطه بالا میتوان پیش از حل کردن همچندی نشانهٔ دو جواب آن را معلوم کرد.

مثال ۱- در همچندی $3x^2-5x+2=0$ چون $b^2-4ac=1$ مثبت است بنابراین همچندی دارای دو جوابست و چون $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$ حاصل ضرب جوابها مثبت است آن دو جواب هم نشانه اند و چون حاصل جمع دو جواب یعنی $-\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$ نیز مثبت است هر دو جواب مثبت میباشد از حلِ همچندی نیز بدو جواب مثبت ۱ و $\frac{2}{3}$ میرسیم

مثال ۲- در همچندی $3x^2+5x+2=0$ چون $b^2-4ac>0$ و $\frac{c}{a}>0$ است بنابراین همچندی دارای دو جواب هم نشانه است ولی $-\frac{b}{a}<0$ است پس هر دو جواب منفی است.

چون همچندی را حل کنیم دو جواب ۱- و $-\frac{2}{3}$ بدست میآید

مثال ۳- در همچندی $x^2-2x-3=0$ $b^2-4ac>0$ و $\frac{c}{a}<0$ است بنابراین همچندی دارای دو جوابست که هم نشانه نیستند.

چون همچندی را حل کنیم بدو جواب ۳ و ۱- میرسیم.

۱۰۱- تبصره- هرگاه $\frac{c}{a}$ منفی باشد (و یا اینکه a و c هم نشانه نباشند) حتماً همچندی ریشه دارد یعنی b^2-4ac مثبت است زیرا چون a و c هم نشانه نیستند بنابراین $ac<0$ است و $-4ac>0$ است و از آنجا $b^2-4ac>0$ میشود.

پس در حالتی که $\frac{c}{a}<0$ است همچندی درجهٔ دوم دو جواب دارد و دو جواب آن هم نشانه نیستند و از روی نشانهٔ مجموع جوابها یعنی از روی نشانهٔ $-\frac{b}{a}$ نشانهٔ جوابیکه قدر مطلقش بیشتر است معلوم میشود. بخصوص اگر $b=0$ باشد دو جواب دو عدد قرینه اند.

مثال ۱- در همچندی $5x^2-3x-2=0$ چون $\frac{c}{a}=\frac{-2}{5}$ منفی است پس این همچندی دارای دو جواب میباشد که هم نشانه نیستند و چون حاصل

جمع دو جواب یعنی $-\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ مثبت است بنابراین قدر مطلق جواب مثبت بیشتر از قدر مطلق جواب منفی است.

از حل همچندی دو جواب ۱ و $-\frac{2}{5}$ بدست میآید.

مثال ۲- در همچندی $7x^2 - 5 = 0$ چون b مساوی صفر است و $\frac{c}{a}$ منفی است همچندی دارای دو جواب قرینه میباشد $x = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}$

تمرین

۱- بدون اینکه همچندیهای زیر را حل کنید معلوم کنید هر کدام جواب دارد یا ندارد و در صورتیکه جواب داشته باشد نشانهٔ جوابها را معلوم کنید.

$2x^2 + 7x + 6 = 0$	$2x^2 - 7x + 6 = 0$
$2x^2 + 7x - 6 = 0$	$2x^2 - 7x - 6 = 0$
$x^2 - 7x = 0$	$3x^2 - 2x + 1 = 0$
$2x^2 + 11 = 0$	$3x^2 - 12 = 0$
$5x^2 - 17x + 3 = 0$	$-x^2 + 5x - 4 = 0$
$4x^2 - 11x - 6 = 0$	$6x^2 + 15x - 21 = 0$
$5x^2 - 14x + 3 = 0$	$9x^2 + 12x + 4 = 0$

۲- در همچندی $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ نخست مقدارهائی برای m

پیدا کنید تا همچندی دارای دو جواب غیر مساوی باشد دوّم مقداری به m بدهید تا همچندی دارای یک جواب مضاعف شود سوّم چه مقدارهائی به m بدهیم تا دو جواب همچندی هم نشانه نباشند؟

۳- در همچندی $4x^2 - 2\alpha x + 5 = 0$ مطلوبست تعیین مقدار α بقسمی که یکی از جوابهایش مساوی $-\frac{3}{2}$ شود پس از تعیین α بدون حلّ همچندی جواب دیگر را حساب کنید

۲- حلّ بعضی مسئله ها

۱۰۲- مسئلهٔ ۱- مطلوبست تعیین دو عدد بقسمی که مجموعشان S و حاصل ضربشان P باشد

حلّ - میتوانیم این دو عدد را جوابهای یک همچندی درجهٔ دوّم بگیریم که اگر آن همچندی درجهٔ دوّم را بالصورت $ax^2 + bx + c = 0$ بگیریم خواهیم داشت $S = -\frac{b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ پس $b = -aS$ و $c = aP$ بنابراین آن همچندی باید چنین باشد:

$$ax^2 - aSx + aP = 0$$

یا $x^2 - Sx + P = 0$ (چون a صفر نیست)

شرط اینکه مسئله ممکن باشد این است که $b^2 - 4ac = S^2 - 4P \geqslant 0$ باشد (یعنی توان دوّم مجموع از چهار برابر حاصل ضرب بزرگتر و یا لااقلّ برابر آن باشد)

با این شرط دو عدد مطلوب عبارتند از:

$$x_1 = \frac{S + \sqrt{S^۲ - ۴P}}{۲} \qquad x_2 = \frac{S - \sqrt{S^۲ - ۴P}}{۲}$$

تبصره - از حلّ این مسئله معلوم میشود که اگر مجموع و حاصل ضرب دو عدد معلوم باشد آن دو عدد جوابهای همچندی درجهٔ دوّمی هستند که در آن ضریب $x^۲$ یک و ضریب x مجموع آن دو عدد با نشانهٔ مخالف و جملهٔ معلوم مساوی حاصل ضرب آن دو عدد باشد.

تمرین

۱- دو عدد چنان تعیین کنید که مجموعشان ۱۵ و حاصل ضربشان ۵۶ باشد.

همچنین وقتیکه $S = ۱۰۵$ و $P = ۸$

» » $S = a\sqrt{۵}$ و $P = a^۲$

» » $S = ۴R$ و $P = ۴R^۲ - ۹a^۲$

» » $S = \sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ و $P = \sqrt{۶}$

» » $S = ۱۰$ و $P = ۲۳$

» » $S = ۵$ و $P = ۲ - \sqrt{۳}$

۲- زمینی است بشکل راست گوشه که پهنه اش ۲۱۶ متر مربع و پیرامونش ۶۰ متر است درازا و پهنای آنرا حساب کنید.

۱۰۳- مسئلهٔ ۲- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که جوابهایش α و β باشند

حلّ این مسئله منجر بحلّ مسئله ۱ میشود زیرا مجموع دو جواب $S = \alpha + \beta$ و حاصل ضربشان $P = \alpha\beta$ معلوم است بنا براین α و β جوابهای این همچندی میباشند

$$x^۲ - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = ۰$$

مثال - همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که جوابهایش ۲- و ۷ باشد

همچندی مطلوب این است $x^۲ - (-۲ + ۷)x + ۷ \times -۲ = ۰$

ویا $x^۲ - ۵x - ۱۴ = ۰$

تمرین

۱- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که دارای این دو جواب باشد ۸ و ۳

همچنین وقتیکه دو جوابش $\sqrt{۲}$ و $۲ - \sqrt{۲}$ باشد

» $\sqrt{۳} + ۱$ و $\sqrt{۳} - ۱$ »

» $a - b$ و $a + b$ »

» $\frac{a + b}{a - b}$ و $\frac{a - b}{a + b}$ »

۲- هریک از همچندیهایی که از مسئلهٔ بالا بدست آمده حل کنید و از نیرو درستی آنهارا امتحان کنید.

۱۰۴- مسئلهٔ ۳- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که چون بر هر جوابش عدد

α افزوده شود جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ بدست آید.

اگر y_1 و y_2 را جوابهای همچندی مطلوب و x_1 و x_2 را جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ بگیریم خواهیم داشت:

$y_1 = x_1 - \alpha$ و $y_2 = x_2 - \alpha$

پس $y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) - 2\alpha$

و $y_1 y_2 = x_1 x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2$

وچون $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ و $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

پس $y_1 + y_2 = -(\frac{b}{a} + 2\alpha)$

و $y_1 y_2 = \frac{c}{a} + \frac{b\alpha}{a} + \alpha^2$

وبموجب مسئله ۱ این همچندی بدست میآید:

$$y^2 + (\frac{b}{a} + 2\alpha)y + \frac{c}{a} + \frac{b\alpha}{a} + \alpha^2 = 0$$

تمرین

۱- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که هر جوابش از جواب همچندی $5x^2 - 6x + 1 = 0$ ۳ یکه کمتر باشد و یا ۲ یکه بیشتر باشد.

۲- عددی پیدا کنید که چون بر هر کدام از جوابهای همچندی $2x^2 - 3x + 1 = 0$ افزوده شود جواب همچندی $2x^2 - 7x + 6 = 0$ بدست آید (بدون حل آنها)

۳- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که هر یک از جوابهایش m برابر جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد.

چون مانند مسئلهٔ ۳ مجموع و حاصل ضرب جوابهای همچندی مطلوب را پیدا کنیم آن همچندی چنین است:

$$ax^2 + mbx + m^2c = 0$$

۱۰۵- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که هر یک از جوابهایش قرینهٔ جوابی از همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد

چون مانند مسئلهٔ ۳ عمل کنیم و یا اینکه در همچندی مسئلهٔ پیش بجای m عدد ۱- را گذاریم همچندی مطلوب چنین میشود

$$ax^2 - bx + c = 0$$

یعنی: هرگاه در دو همچندی درجهٔ دوّم ضریبهای درجهٔ اوّل قرینهٔ یکدیگر باشند و ضریبهای درجهٔ دوّم با هم مساوی و جمله های معلوم نیز با هم مساوی باشند جوابهای آن دو همچندی قرینهٔ هم میباشند

مثلاً جوابهای همچندی $3x^2 - 5x - 2 = 0$ قرینهٔ جوابهای همچندی $3x^2 + 5x - 2 = 0$ است

۱۰۶- مسئلهٔ ۴- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که جوابهایش وارونهٔ

جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد.
مجموع و حاصل ضرب جوابهای همچندی مطلوب چنین میشود:

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

و

$$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$$

پس این همچندی پیدا میشود:

$$X^2 + \frac{b}{c} X + \frac{a}{c} = 0 \quad \text{و یا} \quad cX^2 + bX + a = 0$$

این همچندی جوابهایش وارونهٔ جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ است
از مقایسهٔ آنها با هم نتیجه میشود که:

هرگاه در همچندی درجهٔ دوّمی جای ضریب درجهٔ دوّم و مقدار معلوم را با هم عوض کنیم همچندی حاصل جوابهایش وارونهٔ جوابهای آن همچندی میشود.

۱۰۷- مسئلهٔ ۵- مطلوبست تعیین رابطه ای بین a و b و c بطوریکه رابطهٔ معلومی بین جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ برقرار باشد.

دو رابطهٔ میان جوابها و رابطهٔ معلوم تشکیل دستگاهی میدهند که هرگاه جوابها را در آن دستگاه حذف کنیم رابطهٔ مطلوب بدست میآید.

مثال- چه رابطه ای بین a و b و c برقرار باشد تا یکی از جوابهای همچندی $ax^2 + bx + c = 0$ سه برابر جواب دیگر شود؟

چون x_1 و x_2 را جوابهای این همچندی بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 = 3 x_2 \end{cases}$$

از دو رابطهٔ اوّل و سوّم این دستگاه x_1 و x_2 را برحسب a و b و c پیدا کرده در رابطهٔ دوّم دستگاه قرار میدهیم حاصل میشود:

$$\frac{3b^2}{16a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{و یا} \quad 3b^2 = 16ac$$

این همان رابطهٔ مطلوبست

تمرین

۱- مطلوبست تعیین مقدار q بقسمیکه (x_1 و x_2) جوابهای همچندی

$$x^2 - 8x + q = 0$$

در یکی از شرطهای زیر صدق کند:

اوّلاً $x_1 = x_2$ ثانیاً $x_1 = 3x_2$ ثالثاً $x_1 = \frac{1}{x_2}$ رابعاً $x_1^2 + x_2^2 = 0$

۲- λ را طوری تعیین کنید که دو جواب همچندی

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$$

مساوی گردند.

۳- x_1 و x_2 ریشه های همچندی $ax^2+bx+c=0$ میباشند همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که جوابهایش $\frac{x_1}{x_2}$ و $\frac{x_2}{x_1}$ باشد.

۴- ثابت کنید که همچندی

$$5x^2-2(5m+3)x+5m^2+6m+1=0$$

بازاء همهٔ مقدارهای m دارای دو جواب حقیقی است.

۵- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که جوابهایش عکس جوابهای همچندی $ax^2+3x-p=0$ باشد.

۶- همچندی درجهٔ دوّمی تشکیل دهید که جوابهایش از جوابهای همچندی $5x^2-6x+1=0$ هفت عدد بیشتر باشد.

۷- m را چنان تعیین کنید که جوابهای همچندی $8x^2-(m-1)x+m-7=0$ در یکی از شرطهای زیر صدق کند:

۱- مُساوی هم باشند (۲) قرینهٔ یکدیگر باشند (۳) عکس هم باشند (۴) یکی مُساوی صفر باشد

۸- مطلوبست تعیین ضریبهای p و q بطوریکه چون بر هریک از جوابهای همچندی $x^2-4x+3=0$ افزوده شوند جوابهای همچندی $x^2-p^2x+pq=0$ بدست آید.

۹- قطر راست گوشه ای ۵۰ متر و درازایش ۲۰ متر بیش از پهنای آن است درازا و پهنای آن را حساب کنید.

۱۰- درازای راهی ۱۲۰ کیلومتر است دو نفر دوچرخه سوار آن راه را می پیمایند یکی از آنها که تندیش در ساعت ۱۰ کیلومتر زیادتر از دیگری است آن راه را دو ساعت زودتر می پیماید تُندی هریک چقدر است؟

۱۱- دو متحرّک از دو طرف تکّه خط AB بدرازای ۱۲۵۰ متر بطرف یکدیگر حرکت میکنند اوّلی ۵ ثانیه بعد از دوّمی حرکت نموده و تُندیش در ثانیه ۴ متر بیش از تُندی دُوّمی است تعیین کنید تُندی هریک را درصورتیکه در وسط خطّ AB بهم برسند.

۱۲- حساب کنید پهلوهای سه گوشهٔ قائم الزّاویه ای را که درازای پهلوهایش سه عدد دُرست پُشت سرهم باشند.

بخط محمّد افضلی

غلطنامه

صفحه	سطر	غلط	درست
٦	٦	يك چند جملهٔ	يك چند جملهٔ را
٨	٧		اتحادهای دوم وسوم وچهارم را نیر
٣٨	٢		پیش از تمرین اضافه شود : تبصره ـ در این دو عمل نیز باید نشانه را مراعات نمود
٤٢	١٢	(شمارهٔ صفحهٔ ٣٥)	صفحهٔ ٣١
٥١	٦	a	x
٥٩	٢	d را چهارم	d را
٦٧	٢		آخر سطر بنویسید : بر
٦٩	١٠	دومساوی	دو نامساوی
٨٨	آخر	درازا	درازارا
٩٥	١٤	ثانیه شمار	دقیقه شمار
١٠٠	٣	ـ ١٠٠	١٠٠
١٠١	٤	ولی راه آب	ولی راه آب اول
١٠٥		سطر آخر چنین است :	
			(١) Hiéron (٢) Syracuse (٣) Livre
١١	آخر		(١) Abscisse
١١	١	نشانهٔ جهت	نشانه جهت
١٣١	٨-٩	مساویست :	مساویست .
١٣٤	١٠	$a=0$	$a \neq 0$
١٤٠	٧	$ba - ab'$	$ba' - ab'$
١٤٤	١٢	ساده ای حل	ساده ای میتوان حل
١٥٢	١٠	نا نشد نیست	نا شدنی است
١٥٥	٢	بیشمارند	بیشمار است
١٥٥	١٣	ازین تساوی	ازین تساوی ها
١٧٣	١	ازین تساوی	ازین چهار تساوی

صفحه	سطر	غلط	درست
١٨٣	١	(صفحهٔ ٨٩	(صفحهٔ ٨٩)
١٨٣	٧	نمایش و	نمایش داده
١٨٩	٨	بترتیب	ترتیب
١٩٣	٢	٤٠	٤٠١
١٩٦	٨	٦/٣	٦٫٣
٢٠٠	آخر	abcisse	abscisse
٢٠٢	١٣	سطح	صفحهٔ
٢١٣	٤	همچندیهایهای	همچندیهای
٢٢٨	١٥	$3x^2 80$	$3x^2-80$
٢٣١	١٣	$\frac{b^2-b^2+4ac}{4}=\frac{4ac}{49a}$	$\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}$
٢٤٠	١٠	عوض	عوض

٢٤٢ تمرین ٨ چنین است : مطلوبست تعیین ضریب های p و q بطوریکه چون بر هر یك از جوابهای همچندی $x^2+px+q=0$ یك افزوده شود جوابهای همچندی $x^2-p^2x+pq=0$ بدست آید .

کتاب جبر

برای سوم دبیرستانها

بها در تمام کشور ۴۰ ریال